1. DzŬòŬůêŮôǾ 12 ğŮêŮï äòǿŎô

1g. Dzdzǹǫǯ Q ǴĦǯǨğdzǫg

ĦφÒÏÒÂÊůŰÊêǾ dzŮôůŰÒïÈŘŬÎÊêǾ

DzòÒŮŭòŮÛÒÎŰŮô: g. ǯφÒôÎŰÒôäǾô ï Q. DzŬφŬÎÊêÒÏǼÒô

1Ŭ1 Δημήτριος Γ. Κουμπογιάννης, Χαράλαμπος Σαρίμβεης, Ιωάννης Μπόνης

gÎǼφŰôîÈ ïÒÎŰæÏÒô ïŮÊŘïæÎÈô ŰǼîÈô ÂÊŬ ŰÈÎ ŬòÊèïÈŰÊêǾ φòÒůÒïÒǿŘůÈ ůŰòŘŰǾô òÒǾô ÂŮòŘ Ŭφ Ò φŮòÊůŰòŮŰŭïŮÎÒ êÛÏÊÎŭòÒ

1Ŭ2 Πέτρος Ιωάννου, Μάριος-Ανδρέας Νικολαΐδης και Ναβίτ Κωνσταντίνου

EîŬÊòŮŰÊêǼ ŬφÏÒφÒÊÈïæÎÈ ŰÛòäÈ ůŮ òÒæô ůŮ ŬÂŘÂÒÛô

1Ŭ3 Αλέξανδρος Συράκος, Γεώργιος Γεωργίου, Ανδρέας Αλεξάνδρου

DzŬÛůŭÈ ÎŮôŰûÎŮÊŬô êŬÊ ÊîŘŭÒφÏŬůŰÊêǾô òÒǾô ůŮ êÏŮÊůŰǾ êÒÊÏûŰÈŰŬ

1Ŭ4 Nikolaos A. Bakas and Petros J. Ioannou

Emergence of coherent structures in barotropic turbulence

1Ŭ5 Ε.Γ. Κορωνάκη, Ν. Χειμαριός, Α.Γ. Μπουντουβής

ǯÈ ÂòŬïïÊêÒǿ ôφÒÏÒÂÊůïÒǿ ïŮ ŬïφÒòÊêÒÛô êûŭÊêŮô CFD

1Ŭ6 Ελευθέριος Μπένος και Νικόλαος Πελεκάσης

ǯŮÏæŰÈ ŰÈô ůŰŬŰÊêǾô ŭŬŬïûòűŘůÈô ŰÒô ôÂòÒŬ ïŰŰǼÏÏÒô ůŰÒ CPS êŬÊ ŰÈô òÒǾô ŰÒô ïæůŬ ŬφûæÎŬ φûŭòÒ

1Ŭ7 Π. Α. Μπακάλης, Π. Μ. Χατζηκωνσταντίνου, Π. Βαφέας

ǯŬÂÎÈŰÒòŮôůŰÒŭôÎŬïÊêǾ òÒǾ ôÂòÒŬ ïŰŰǼÏÏÒô ŮÎŰûô êŬïφôÏûÎ ŭŬêŰôÏÊÒŮÊŭûÎ ŬÂŘÂûÎ ŰÒòÒŮÊŭÒÛô ÂŮŘïŰŰòǿŬô

1Ŭ8 Α. Π. Βούρος, A. Pollard, R. R. Schwab και Θ. Πανίδης

pŬòŬêŰÈòÊůŰÊêŬ ÂÎŘòǿůïŬŰŬ ÒòêÒÂûÎÊŬô ŭæůïÈô ŮêòÒǾô ůŰÒ ŮÂÂÛô φŮŭǿÒ

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΕΛΑΤΤΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΡΩΤΗΣ ΡΟΗΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ

Δημήτριος Γ. Κουμπογιάννης[1], Χαράλαμπος Σαρίμβεης[2], Ιωάννης Μπόνης[3]

[1]Επίκουρος Καθηγητής (dkoubog@teiath.gr), Τμήμα Μηχανικών Ενεργειακής Τεχνολογίας, Εργαστήριο Ατμολεβήτων & Θερμικών Στροβιλομηχανών, ΣΤΕΦ, ΤΕΙ Αθήνας, Αγίου Σπυρίδωνος, 14310, Αιγάλεω, Αθήνα

[2]Αναπληρωτής Καθηγητής (hsarimv@central.ntua.gr), Σχολή Χημικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780, Ζωγράφου, Αθήνα

[3]Εξωτερικός Συνεργάτης-Ερευνητής (ibonis@helpe.gr), Τμήμα Μηχανικών Ενεργειακής Τεχνολογίας, Εργαστήριο Ατμολεβήτων & Θερμικών Στροβιλομηχανών, ΣΤΕΦ, ΤΕΙ Αθήνας, Αγίου Σπυρίδωνος, 14310, Αιγάλεω, Αθήνα

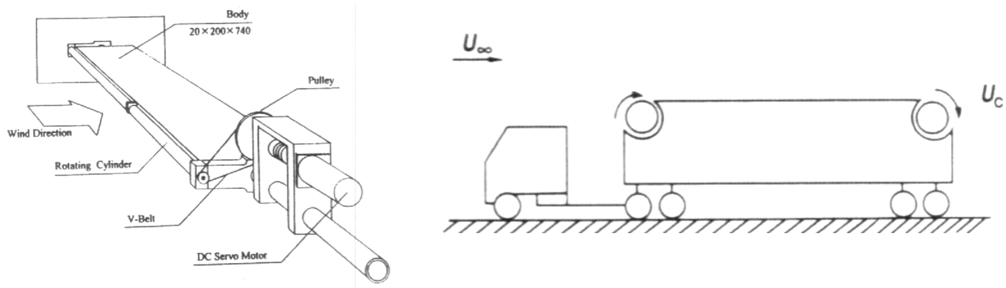
ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αφορά την προσομοίωση στρωτής ασυμπίεστης ροής γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο με μοντέλο ελαττωμένης τάξης ακρίβειας POD-Galerkin. Είναι συνέχεια σχετικής εργασίας των συγγραφέων για ροή γύρω από στατικό κύλινδρο σε αριθμό Reynolds 100, όπου παρατηρείται περιοδική εκπομπή δινών (vortex shedding). Αποτελεί βήμα προς την ανάπτυξη αριθμητικής μεθόδου ελέγχου ροής (flow control), με στόχο την ελάττωση της έντασης του φαινομένου της εκπομπής δινών σε ροές γύρω από κύλινδρο και μεταβλητή ελέγχου την ταχύτητα περιστροφής του. Για το σκοπό αυτό απαιτείται επιτάχυνση της μεθόδου αριθμητικής προσομοίωσης χωρίς σημαντική μείωση της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων της. Το πλήρες μοντέλο βασίζεται σε εμπορικό λογισμικό CFD. Το μοντέλο ελαττωμένης τάξης ακρίβειας που παρουσιάζεται βασίζεται στη μεθοδολογία Κατάλληλης Ορθογωνικής Αποδόμησης (Proper Orthogonal Decomposition-POD) του πεδίου ταχύτητας. Σύμφωνα με αυτήν, η ταχύτητα αναπαρίσταται μέσω γραμμικού συνδυασμού χωρικών διανυσμάτων πολλαπλασιασμένων με χρονικούς συντελεστές. Η μέθοδος χρησιμοποιεί δείγμα αντιπροσωπευτικών εικόνων του πεδίου ροής με σκοπό την εξαγωγή συνόλου ορθομοναδιαίων συναρτήσεων βάσης που περιγράφουν το χώρο των λύσεων. Μέσω προβολής Galerkin των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ) που διέπουν τη ροή στις συναρτήσεις βάσης παράγονται Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ) ως προς τους χρονικούς συντελεστές. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά του πλήρους μοντέλου, ως προς την ακρίβεια της λύσης και την εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου.

Λέξεις Κλειδιά: Μοντέλο ελαττωμένης τάξης ακρίβειας, προβολή Galerkin, εκπομπή δινών, ομμόρους περιστρεφόμενου κυλίνδρου.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα φαινόμενα εκπομπής δινών παρατηρούνται τόσο στη φύση όσο και στην τεχνολογία, ιδιαίτερα σε ροές γύρω από σώματα μεγάλης μετωπικής επιφάνειας. Η εκπομπή δινών εξαιτίας της αποκόλλησης της ροής, για παράδειγμα από την ακμή πρόσπτωσης μιας κατασκευής, επάγει σε αυτήν ταλαντώσεις που μπορούν δυνητικά να προκαλέσουν την καταστροφή της. Για το λόγο αυτό είναι σημαντική η έρευνα περί της ελάττωσης της έντασης τέτοιων φαινομένων. Το όφελος από τα σχετικά αποτελέσματα αφορά πλήθος εφαρμογών στην πράξη, όπως π.χ. σε κατασκευές Πολιτικού Μηχανικού, γέφυρες πολύ μεγάλου μήκους (άνω των 3 km, long-span bridges), των οποίων οι δοκοί στήριξης είναι δυνατό, λόγω των ιδιοσυχνοτήτων τους, να υποστούν ταλαντώσεις επαγόμενες από τον άνεμο σε πολύ μικρότερες ταχύτητες ανέμου από τις ταχύτητες σχεδιασμού τους (Kubo, 2004). Πολλές κατασκευές έχουν μεταβλητές χειρισμού και υποστηρίζουν ενεργό έλεγχο ροής, εξασφαλίζοντας την ασφαλή λειτουργία τους σε ποικίλες συνθήκες. Μία από τις αρκετά υποσχόμενες τεχνικές που έχουν προταθεί για την ελάττωση της εκπομπής δινών είναι ο έλεγχος ροής του οριακού στρώματος μέσω της περιστροφής κατάλληλα τοποθετημένου κυλίνδρου (Gad-El-Hak, 2000)(Kubo, 2004). Οι σχετικές εφαρμογές απαντώνται, εκτός από κτίρια και γέφυρες (Σχήμα 1(α)), στην αεροδυναμική σχεδίαση οχημάτων (Σχήμα 1(β)) για τη μείωση της επαγόμενης οπισθέλκουσας (αντίστασης) άρα και της κατανάλωσης καυσίμου και σε πλήθος ακόμη ροών της Μηχανολογίας και της Αεροναυτικής (αύξηση της άνωσης και ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας αεροτομής με αναστολή της αποκόλλησης της ροής, κτλ).



Σχήμα 1. *Παραδείγματα δυνητικού ελέγχου ροής μέσω της κατάλληλα περιστροφής κυλίνδρου: Έλεγχος ροής με περιστρεφόμενο κύλινδρο ανάντι γέφυρας μεγάλου μήκους (αριστερά, Kubo, 2004). Μείωση οπισθέλκουσας σε φορτηγό με ρυμουλκούμενο τμήμα (δεξιά, Gad-El-Hak, 2000).*

Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος έρευνας με απώτερο στόχο την ανάπτυξη, από τους συγγραφείς, μιας μεθοδολογίας ενεργού ελέγχου της ροής, προβλεπτικού τύπου, γύρω από σώματα μεγάλης μετωπικής επιφάνειας με σκοπό την ελάττωση του φαινομένου της εκπομπής δινών. Η μεθοδολογία θα βασίζεται στη συνδυασμένη χρήση της μη-γραμμικής μεθόδου προβλεπτικού τύπου NMPC (Nonlinear Model Predictive Control) (Allgöwer και Zhen, 2000)(Weiguo et al, 2012) και ελαττωμένης τάξης ακρίβειας μοντελοποίηση της ροής, με μεταβλητή ελέγχου τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής κατάλληλα τοποθετημένου κυλίνδρου. Η κατασκευή μοντέλων ελαττωμένης τάξης από μεγαλύτερης πολυπλοκότητας μοντέλα βασίζεται είτε σε απλοποίηση του φυσικού προβλήματος είτε σε μαθηματική προσέγγιση (Theodoropoulos, 2000). Στο πλαίσιο της υπό ανάπτυξης μεθοδολογίας επιλέχθηκε η μέθοδος Κατάλληλης Ορθογωνικής Αποδόμησης (Proper Orthogonal Decomposition-POD) (Sirovich, 1987), επειδή είναι ακριβής, αποδοτική και καθιερωμένη. Υπό το πρίσμα των παραπάνω, η παρούσα έρευνα αφορά την ανάπτυξη ενός χαμηλού κόστους και υψηλής ευελιξίας υπολογιστικού εργαλείου που ενσωματώνει προηγμένες μαθηματικές τεχνικές. Αποτελεί συνέχεια προηγούμενης των ίδιων συγγραφέων σχετικά με την ανάπτυξη POD-μοντέλου μειωμένης τάξης ακρίβειας και την εφαρμογή του στην περίπτωση αριθμητικής προσομοίωσης στρωτής ροής ασυμπίεστου ρευστού γύρω από ακίνητο κύλινδρο (Bonis et al, 2013). Εδώ η μέθοδος επεκτείνεται στην περίπτωση στρεφόμενου κυλίνδρου με μεταβλητή ταχύτητα (η οποία και πρόκειται μελλοντικά να αντιμετωπιστεί ως μεταβλητή χειρισμού). Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζεται και πιστοποιείται η μεθοδολογία POD για την αριθμητική προσομοίωση ροής γύρω από στρεφόμενο κύλινδρο, σχολιάζονται τα αποτελέσματα και συγκρίνονται με αντίστοιχα του πλήρους μοντέλου αριθμητικής προσομοίωσης, ως προς την ακρίβειά τους και την εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου.

2. ΠΛΗΡΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΚΠΟΜΠΗΣ ΔΙΝΩΝ

Το πρόβλημα που επιλέχθηκε για την αριθμητική προσομοίωση ροής με εκπομπή δινών αφορά τη ροή ασυμπίεστου ρευστού πυκνότητας ρ γύρω από δισδιάστατο κύλινδρο διαμέτρου D αριθμού Reynolds Re=100 (Graham et al, 1999). Η ροή αυτή είναι στρωτή, μη-μόνιμη και χαρακτηρίζεται από περιοδική εκπομπή δινών. Οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα είναι η η (βαθμωτή) εξίσωση της συνέχειας (διατήρηση μάζας) και η (διανυσματική) εξίσωση Navier-Stokes (εξίσωση ορμής), οι οποίες σε αδιάστατοποιημένη μορφή (χρησιμοποιώντας ως ταχύτητα αναφοράς αυτή της εισόδου) γράφονται, αντίστοιχα:

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{1}$$

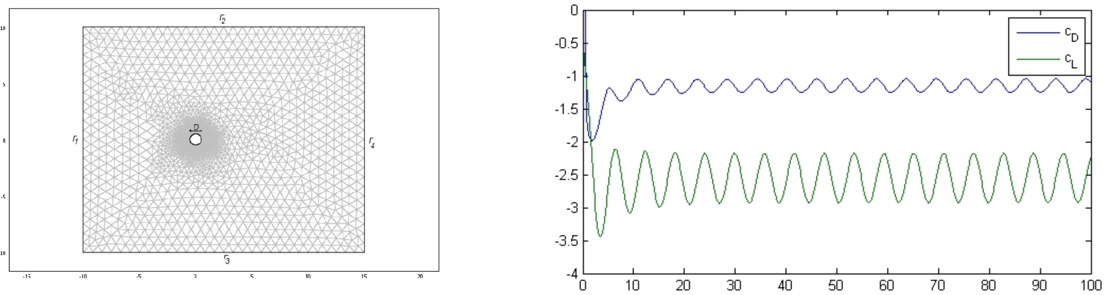
$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u \tag{2}$$

Οι συνοριακές συνθήκες για τις παραπάνω εξισώσεις είναι $u = (1, 0)$ στο σύνορο Γ_1 (είσοδος), $p = 0$ στο Γ_3 (έξοδος), $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0,\ u_y = 0$ στα Γ_2, Γ_4 (πάνω, κάτω σύνορα) και $u \cdot \left(-\hat{n}_y, \hat{n}_x\right) = 1$, $u \cdot \hat{n} = 0$ στο Γ_c (κύλινδρος, $\hat{n} = \left(-\hat{n}_y, \hat{n}_x\right)$=κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε αυτήν), ενώ οι αρχικές συνθήκες είναι u=0.

Το παραπάνω πρόβλημα μοντελοποιήθηκε και επιλύθηκε από εμπορικό πακέτο λογισμικού COMSOL (2008). Οι εξισώσεις διακριτοποιήθηκαν στο χώρο μέσω πεπερασμένων στοιχείων Lagrange P^2-P^1. Το υπολογιστικό πλέγμα (Σχήμα 2) αποτελείται από 4528 τριγωνικά στοιχεία με 20766 βαθμούς ελευθερίας. Τα σύνορά του Γ_1, Γ_2 και Γ_3 απέχουν 10D, από το κέντρο του κυλίνδρου, ενώ το σύνορο Γ_4 που αποτελεί την έξοδο του συστήματος, απεχει 15D, όπου D είναι η διάμετρος του κυλίνδρου. Οι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας υπολογίστηκαν ως C_L=2F_y, C_D=2F_x, μέσω της x- και της y-συνιστώσας της δύναμης επί του κυλίνδρου

$$F = (F_x, F_y) = \int_{\Gamma_c} \left(p\hat{n} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \tag{3}$$

Στο Σχήμα 1 (δεξιά) εικονίζεται η χρονική εξέλιξη των δύο παραπάνω συντελεστών. Από αυτό φαίνεται η περιοδικότητα που αποκαθίσταται στο φαινόμενο, με περίοδο 5.9 χρονικές μονάδες, καθώς και οι μέσες τιμές των συντελεστών $\overline{C}_L = -2.55$ και $\overline{C}_D = -1.15$. Στην εργασία των Bonis et al (2013) έχει επιλυθεί και πιστοποιηθεί ως προς τη βιβλιογραφία (Graham et al, 1999), η αντίστοιχη περίπτωση ακίνητου κυλίνδρου.



Σχήμα 2. *Υπολογιστικό πλέγμα (αριστερά). Χρονική εξέλιξη συντελεστών άνωσης, αντίστασης (δεξιά).*

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΤΑΛΛΗΛΗΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΑΠΟΔΟΜΗΣΗΣ

3.1 Στρατηγική μεθοδολογίας POD για την ανάπτυξη μοντέλου μειωμένης τάξης ακρίβειας

Η μέθοδος Κατάλληλης Ορθογωνικής Αποδόμησης (Proper Orthogonal Decomposition), POD στο εξής, συναντάται και με τους όρους Ανάπτυξη Karhunen-Loève και Ανάλυση σε Κύριες Συνιστώσες (Principal Component Analysis) και έχει τις ρίζες της στη Στατιστική (Hotelling, 1933). Αποτελεί μια υπολογιστικά αποδοτική μεθοδολογία ελαττωμένης τάξης ακρίβειας που χρησιμοποιείται σε πλήθος εφαρμογών (Liang et al, 2002). Κατ' αυτήν, οποιαδήποτε εφικτή κατάσταση του συστήματος αναπαρίσταται ως γραμμικός συνδυασμός χρονικών συντελεστών και χωρικών συναρτήσεων βάσης, οπότε το σύστημα δυναμικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ) που διέπουν το πρόβλημα προσεγγίζεται μέσω ενός μικρού πλήθους Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (ΣΔΕ) ως προς τους χρονικούς συντελεστές της αναπαράστασης, οι οποίες και αντικαθιστούν τις ΜΔΕ. Έτσι, το διάνυσμα της ταχύτητας $u \in \Re^d$ του ρευστού σε δύο διαστάσεις (*d*=2), σε κάθε σημείο του χώρου $x \in \Re^d$ και κάθε χρονική στιγμή $t \in \Re$, δίδεται από έκφραση της μορφής

$$\hat{u}(x,t) = \overline{u}(x) + \sum_{i=1}^{n_{POD}} a_i(t)\varphi_i(x) \tag{4}$$

όπου $\hat{u} \in \Re^d$ είναι η κατά POD προσέγγιση της ταχύτητας, $a_i(t):\Re \to \Re$ είναι οι χρονικά μεταβαλλόμενοι συντελεστές της αναπαράστασης, $\varphi_i(x):\Re^d \to \Re^d$ είναι οι χωρικά μεταβαλλόμενοι όροι (συναρτήσεις βάσης), το πλήθος n_{POD} των οποίων καθορίζει την ακρίβεια της προσέγγισης, ενώ $\bar{u} \in \Re^d$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα στο χρόνο. Το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του πλήρους μοντέλου είναι $n = d.N$ όπου N το πλήθος των διανυσμάτων ταχύτητας (δηλαδή το πλήθος κόμβων του πλέγματος). Έτσι, το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος $U:\Re^n \to \Re^n$ αποτελείται από n συνιστώσες (N δισδιάστατα διανύσματα ταχύτητας, $\hat{U}(x,t) = \left[\hat{u}_1(x,t) \quad \hat{u}_2(x,t) \quad \ldots \quad \hat{u}_n(x,t)\right]^T$), ενώ το διάνυσμα της βάσης POD $\Phi:\Re^n \to \Re^{n_{POD}}$ αποτελείται από n_{POD} δισδιάστατες συναρτήσεις βάσης $\Phi(x) = \left[\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \ldots \quad \varphi_{n_{POD}}(x)\right]^T$. Συμβολίζοντας διανυσματικά τους χρονικούς συντελεστές $a(t) = \left[a_1(t) \quad a_2(t) \quad \ldots \quad a_{n_{POD}}(t)\right]^T$, η (4) γράφεται

$$\hat{U}(x,t) = \bar{U}(x) + a^T(t)\cdot\Phi(x) \tag{4'}$$

3.2 Η μέθοδος των στιγμιοτύπων

Μία από τις επικρατούσες μεθόδους εύρεσης των συναρτήσεων βάσης είναι η μέθοδος των στιγμιοτύπων (Sirovich, 1987). Σύμφωνα με αυτή, ένα πλήθος M αντιπροσωπευτικών στιγμιοτύπων της διανυσματικής μεταβλητής κατάστασης u παράγεται από το πλήρες μοντέλο και η εξαγωγή του βέλτιστου συνόλου συναρτήσεων βάσης αναζητείται μέσω της ελαχιστοποίησης (στη λογική ελαχίστων τετραγώνων), για δεδομένο πλήθος συναρτήσεων βάσης n_{POD}, του σφάλματος αποκοπής

$$e_M = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left\|U(x,t_j) - \hat{U}(x,t_j)\right\|^2 \tag{5}$$

Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της μεγιστοποίησης της παράστασης

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{M}\left(U(x,t_j),\varphi_j(x)\right)^2 \Big/ M\cdot\left\|\Phi(x)\right\|^2\right\} \tag{6}$$

όπου $(\cdot,\cdot)_\Omega$ είναι η Ευκλείδια νόρμα που επάγεται από το διανυσματικό εσωτερικό γινόμενο στο χωρίο Ω. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης (6) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$R\varphi_i = \lambda_i\varphi_i, \quad i = 1,2,\ldots,n_{POD} \tag{7}$$

Στη μέθοδο των στιγμιοτύπων, οι συναρτήσεις βάσης εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμός τους, οπότε τα βασικά ζητούμενα είναι ο υπολογισμός των συντελεστών του γραμμικού συνδυασμού και ο καθορισμός του πλήθους των συναρτήσεων βάσης n_{POD}. Αρχικά οι μεταβλητές κατάστασης τροποποιούνται ώστε η μέση τιμή των στιγμιοτύπων να είναι μηδέν, υπολογίζοντας το μέσο διάνυσμα κατάστασης των στιγμιοτύπων σε κάθε σημείο του χώρου και αφαιρώντας το από κάθε στιγμιότυπο.

$$\bar{U}(x) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}U(x,t_j) \tag{8}$$

$$V(x,t_j) = U(x,t_j) - \bar{U}(x,t_j), \quad j = 1,2,\ldots,M \tag{9}$$

Με τις τροποποιημένες μεταβλητές κατάστασης υπολογίζεται ο πίνακας συσχέτισης $[C] \in \Re^{M\times M}$

$$C_{ij} = \frac{1}{M}V^T(x,t_i)\cdot V(x,t_j), \quad i,j = 1,2,\ldots,M \tag{10}$$

που χρησιμοποιείται για την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος ιδιοτιμών (W είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $[C]$):

$$CW^{(i)} = \lambda_i W^{(i)}, \quad i = 1,2,\ldots,M \tag{11}$$

οπότε οι συναρτήσεις βάσης υπολογίζονται ως

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{M}W_j^{(i)}V(x,t_j), \quad i = 1,2,\ldots,M \tag{12}$$

και είναι ορθομοναδιαίες, δηλαδή $(\varphi_i,\varphi_j)_\Omega = \delta_{ij}$, λόγω του ότι ο πίνακας C είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση **Error! Reference source not found.** αντί της (4') εμπλέκεται πίνακας μικρότερων διαστάσεων ($M\times M$ αντί n×n). Οι ιδιοτιμές που υπολογίζονται λ διατάσσονται κατά ελάσσονα σειρά με βάση το μέτρο τους. Η «συνολική ενέργεια» του συνόλου των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές αυτές είναι $E_{tot}=\sum_{j=1}^{M}\lambda_j$, ενώ το «ποσό ενέργειας» που «συλλαμβάνεται» από την POD μοντελοποίηση είναι $E_{captured}=\sum_{j=1}^{n_{POD}}\lambda_j / E_{tot}$. Η τιμή του πλήθους n_{POD} ορίζεται από το ελάχιστο αποδεκτό κατώφλι ενέργειας του αρχικού συστήματος που πρέπει να συλλαμβάνεται.

3.3 Παραμετρική POD με τη μέθοδο της συνάρτησης ελέγχου

Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, το μοντέλο POD που παράγεται είναι παραμετρικό, δηλαδή έχει μια ανεξάρτητη μεταβλητή (τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής) που μπορεί να μεταβληθεί δρώντας ως βαθμός ελευθερίας. Σε αυτήν την περίπτωση η κλασική POD με τη μέθοδο των στιγμιοτύπων πρέπει να τροποποιηθεί, ώστε να έχουμε ομογενείς συνοριακές συνθήκες αντί για τις προκύπτουσες ανομοιογενείς (Graham et al, 1999). Για το λόγο αυτό, ενσωματώνεται μια συνάρτηση ελέγχου (control function), στην αναπαράσταση του πεδίου ταχύτητας. Εναλλακτικά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί «μέθοδος ποινής» (penalty method), ώστε να προκύπτουν ανομοιογενείς συνοριακές συνθήκες στην προβολή Galerkin, αντί να τροποποιούνται οι συναρτήσεις βάσεις. Στην προσέγγιση της συνάρτησης ελέγχου, για την εξαγωγή των συναρτήσεων βάσης της POD, αφαιρείται από κάθε στιγμιότυπο πριν την χρήση του, μια συνάρτηση ελέγχου. Αυτή η συνάρτηση μπορεί να επιλεγεί ελεύθερα, αρκεί να διατηρεί την ιδιότητα του πεδίου να είναι μηδενικής απόκλισης (divergence-free) και να ικανοποιεί τις ομογενείς οριακές συνθήκες στα όρια Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4. Εδώ, ως συνάρτηση ελέγχου επιλέχθηκε το πεδίο ταχύτητας για γωνιακή ταχύτητα *γ=1.* Τα τροποποιημένα στιγμιότυπα χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή της μέσης ταχύτητας και των συναρτήσεων βάσης όπως στο προηγούμενο εδάφιο. Όμως πλέον η εξίσωση (4) περιλαμβάνει και την συνάρτηση ελέγχου:

$$\hat{u}(x,t)=\overline{u}(x)+\gamma(t)u_C(x)+\sum_{i=1}^{n_{POD}}a_i(t)\varphi_i(x) \tag{13}$$

3.4 Υπολογισμός των χρονικών συντελεστών με τη μέθοδο Galerkin

Στην περίπτωση περιστρεφόμενου κυλίνδρου, η ταχύτητα επί της επιφάνειας του κυλίνδρου Γ_C είναι μη-μηδενική και ίση με τη γραμμική ταχύτητα περιστροφής του. Η προσέγγιση κατά POD στην περίπτωση αυτή δίνεται από την (13). Ο συντελεστής $\gamma(t)$ δίνει τη δυνατότητα χρονικής μεταβολής στην ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου και αποτελεί τη μεταβλητή ελέγχου στην περίπτωση προβλήματος ελέγχου της ροής (flow control) μέσω της περιστροφής. Η POD-προσέγγιση του διανύσματος μεταβλητών κατάστασης με βάση τη σχέση (13), απαιτεί εκτός από τις συναρτήσεις βάσης $\varphi_i(x)$ και τους χρονικούς συντελεστές $a_i(t)$. Στην παρούσα μεθοδολογία, αυτοί υπολογίζονται μέσω της προβολής Galerkin των εξισώσεων στα διανύσματα της βάσης. Έτσι, η εξίσωση της συνέχειας για το προσεγγιστικό POD-πεδίο ταχύτητας (1) γράφεται

$$\nabla\cdot\hat{u}=0\Rightarrow\nabla\cdot\overline{u}+\nabla\cdot u_C+\sum_j a_j\left(\nabla\cdot\varphi_j\right)=0 \tag{14}$$

Η συνθήκη μη-εισχώρησης (μηδενικής τιμής συνθήκη Neumann) για την POD-ταχύτητα στα σύνορα γράφεται

$$\hat{u}\cdot\hat{n}=0\Rightarrow\overline{u}\cdot\hat{n}+u_C\cdot\hat{n}+\sum_j a_j\left(\varphi_j\cdot\hat{n}\right)=0 \tag{15}$$

Τόσο το μέσο POD-πεδίο ταχύτητας $\overline{u}(x)$ όσο και αυτό που αντιστοιχεί σε μοναδιαίο συντελεστή περιστροφής $u_C(x)$ ικανοποιούν τις σχέσεις $\nabla\cdot\overline{u}=0$, $\nabla\cdot u_C=0$ και $\overline{u}\cdot\hat{n}=0$, $u_C\cdot\hat{n}=0$, οπότε οι παραπάνω δύο εξισώσεις (13) και (14) γράφονται $\sum_j a_j\left(\nabla\cdot\varphi_j\right)=0$ και $\sum_j a_j\left(\varphi_j\cdot\hat{n}\right)=0$ και επειδή τα διανύσματα βάσης φ_j είναι γραμμικά ανεξάρτητα, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις (για $j=1,n_{POD}$)

$$\nabla\cdot\varphi_j=0 \tag{16}$$

$$\varphi_j\cdot\hat{n}=0 \tag{17}$$

Η προβολή Galerkin της εξίσωσης ορμής στο (1) στον υπόχωρο λύσεων που γεννάται από τα διανύσματα βάσης $\varphi_i(x)$ γράφεται (για το τυχαίο $i=1,n_{POD}$)

$$\left(\varphi_i,\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\right)_\Omega=-\left(\varphi_i,(\hat{u}\cdot\nabla)\hat{u}\right)_\Omega-\left(\varphi_i,\nabla p\right)_\Omega+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\varphi_i,\nabla^2\hat{u}\right)_\Omega \tag{18}$$

Με χρήση ιδιοτήτων διαφορικού διανυσματικού λογισμού και των βοηθητικών σχέσεων (16) και (17), προκύπτουν για τους όρους της παραπάνω εξίσωσης οι ακόλουθες εκφράσεις

$$\left(\varphi_i,\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\right)_\Omega=\frac{da_i}{dt} \tag{19}$$

$$\left(\varphi_i,\nabla p\right)_\Omega=0 \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\left(\varphi_i,(\hat{u}\cdot\nabla)\hat{u}\right)_\Omega&=\left(\varphi_i,(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}\right)_\Omega+\sum_j a_j\left(\varphi_i,(\varphi_j\cdot\nabla)\overline{u}\right)_\Omega+\sum_j a_j\left(\varphi_i,(\overline{u}\cdot\nabla)\varphi_j\right)_\Omega+\\&\sum_j a_j\left\{\sum_k a_k\left(\varphi_i,(\varphi_j\cdot\nabla)\varphi_k\right)_\Omega\right\}+\gamma\left(\varphi_i,(u_C\cdot\nabla)\overline{u}\right)_\Omega+\gamma\left(\varphi_i,(\overline{u}\cdot\nabla)u_C\right)_\Omega+\\&\gamma^2\left(\varphi_i,(u_C\cdot\nabla)u_C\right)_\Omega+\sum_j\gamma a_j\left(\varphi_i,(\varphi_j\cdot\nabla)u_C\right)_\Omega+\sum_j\gamma a_j\left(\varphi_i,(u_C\cdot\nabla)\varphi_j\right)_\Omega\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\left(\varphi_i,\nabla^2\hat{u}\right)_\Omega&=\left[\varphi_i\nabla\overline{u}\right]_{\partial\Omega}+\sum_j a_j\left[\varphi_i\nabla\varphi_j\right]_{\partial\Omega}-\left(\nabla\varphi_i,\nabla\overline{u}\right)_\Omega-\sum_j a_j\left(\nabla\varphi_i,\nabla\varphi_j\right)_\Omega+\\&\gamma\left[\varphi_i\nabla u_C\right]_{\partial\Omega}-\gamma\left(\nabla\varphi_i,\nabla u_C\right)_\Omega\end{aligned} \tag{22}$$

όπου $\partial\Omega$ είναι το σύνορο του χωρίου Ω. Μετά την ανάπτυξη των εκφράσεων (18)-(21) και την αντικατάστασή τους στην (17), προκύπτει η εξίσωση εξέλιξης για κάθε χρονικό συντελεστή a_i είναι μία ΣΔΕ της μορφής ($i,j,k=1,n_{POD}$)

$$\frac{da_i(t)}{dt}=D_i(x)\frac{d\gamma}{dt}+A_i(x)+\sum_j B_{ij}(x)a_j(t)+\sum_j\sum_k C_{ijk}(x)a_j(t)a_k(t) \tag{23}$$

όπου οι εμφανιζόμενοι συντελεστές ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$D_i(x)=-F_0(\varphi_i,u_C) \tag{24}$$

$$A_i(x)=-F_1(\varphi_i,\overline{u}',\overline{u}')-\frac{1}{\mathrm{Re}}F_2(\varphi_i,\overline{u}')+\frac{1}{\mathrm{Re}}F_3(\varphi_i,\overline{u}') \tag{25}$$

$$B_{ij}(x)=-F_1(\varphi_i,\varphi_j,\overline{u})-F_1(\varphi_i,\overline{u}',\varphi_j)-F_1(\varphi_i,\varphi_j,u_C)-\frac{1}{\mathrm{Re}}F_2(\varphi_i,\varphi_j)+\frac{1}{\mathrm{Re}}F_3(\varphi_i,\varphi_j) \tag{26}$$

$$C_{ijk}(x)=-F_1(\varphi_i,\varphi_j,\varphi_k) \tag{27}$$

όπου $\overline{u}'=\overline{u}+\gamma u_C$. Οι τελεστές που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις ορίζονται συμβολικά επί των βοηθητικών διανυσμάτων $b=\left(b_x,b_y\right)$, $c=\left(c_x,c_y\right)$, $d=\left(d_x,d_y\right)$ και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο του χωρίου $\hat{n}=\left(\hat{n}_x,\hat{n}_y\right)$ ως εξής:

$$F_1\left(b,c,d\right)=\left(b,(c\cdot\nabla)d\right)_\Omega=\iint_\Omega\left(b_x\left(c_x\frac{\partial d_x}{\partial x}+c_y\frac{\partial d_x}{\partial y}\right)+b_y\left(c_x\frac{\partial d_y}{\partial x}+c_y\frac{\partial d_y}{\partial y}\right)\right)d\Omega \tag{28}$$

$$F_2\left(b,c\right)=\left(\nabla b,\nabla c\right)_\Omega=\iint_\Omega\left(\frac{\partial b_x}{\partial x}\frac{\partial c_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}\frac{\partial c_y}{\partial y}\right)d\Omega \tag{29}$$

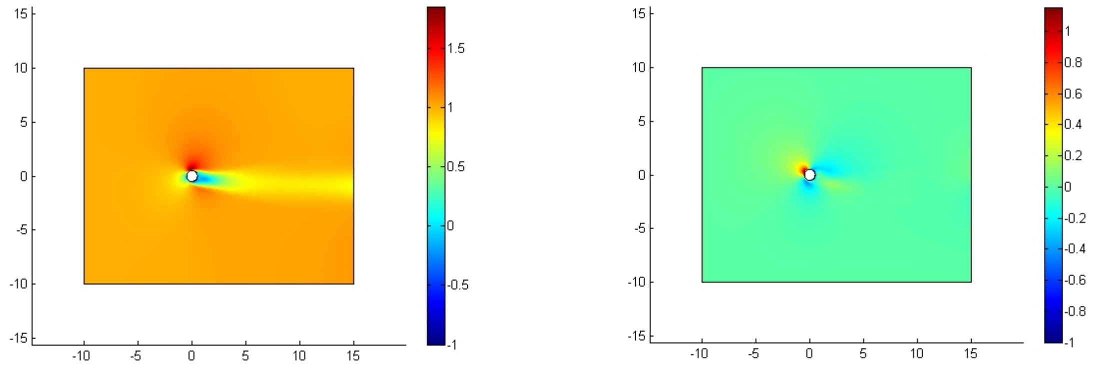
$$F_3\left(b,c\right)=\left[b,\nabla c\right]_{\partial\Omega}=\int_{\partial\Omega}\left(b_x\left(\hat{n}_x\frac{\partial c_x}{\partial x}+\hat{n}_y\frac{\partial c_x}{\partial y}\right)+b_y\left(\hat{n}_x\frac{\partial c_y}{\partial x}+\hat{n}_y\frac{\partial c_y}{\partial y}\right)\right)d\Gamma \tag{30}$$

Για την ολοκλήρωση στο χρόνο των παραπάνω ΣΔΕ ως προς τα $a_i(t)$, απαιτούνται αρχικές συνθήκες οι οποίες παρέχονται από την προβολή του διανύσματος $\hat{u}-\overline{u}-\gamma u_C=\sum_j a_j\varphi_j$ στο διάνυσμα βάσης φ_i, δηλαδή $a_i(t)=\left(\varphi_i,\hat{u}-\overline{u}-\gamma u_C\right)$, οπότε για $t=0$ όπου $a_i(0)=\left(\varphi_i,\hat{u}_0-\overline{u}-\gamma u_C\right)$ και $\hat{u}_o=\hat{u}(0)$ είναι το αρχικό πεδίο της POD-ταχύτητας.

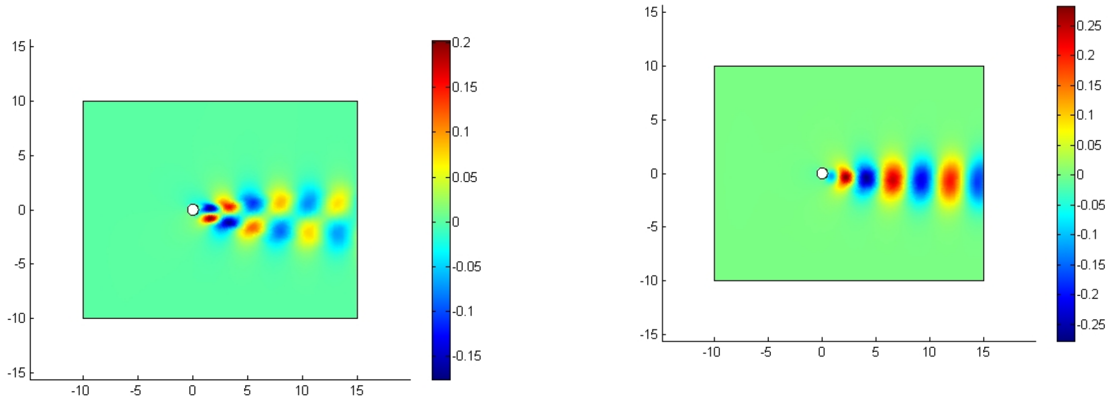
4. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

4.1 Συλλογή Στιγμιοτύπων και Υπολογισμός Συναρτήσεων Βάσης

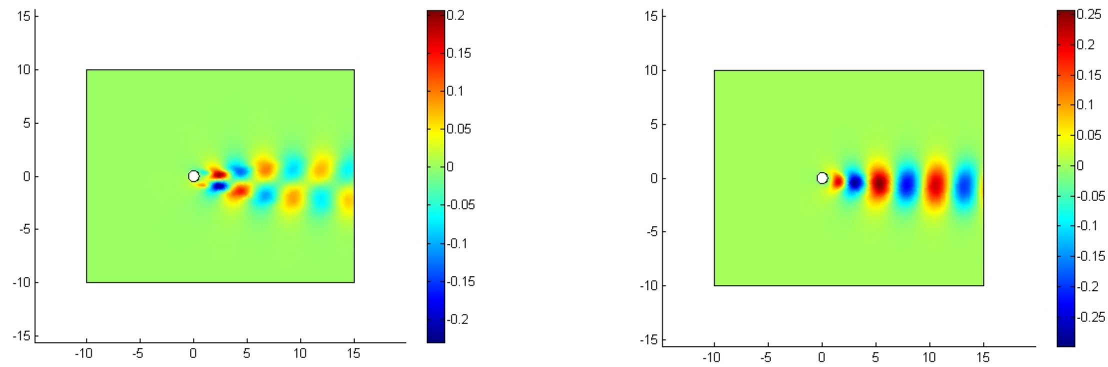
Η συλλογή στιγμιοτύπων από το πλήρες μοντέλο προσομοίωσης ξεκινά μόλις αποκατασταθεί η περιοδικότητα στη λύση. Ο χρόνος δειγματοληψίας από το μοντέλο πλήρους τάξης (CFD) είναι 0.1. Τα στιγμιότυπα συλλέγονται για 5 περιόδους, οπότε προκύπτουν πίνακες διάστασης 9212x178 για τις x- και y-συνιστώσες της ταχύτητας. Από αυτούς προκύπτει ο πίνακας συσχέτισης διάστασης 178x178.



Σχήμα 3. *Μέσο πεδίο στιγμιοτύπων x- (αριστερά) και y- συνιστώσας της ταχύτητας (δεξιά).*



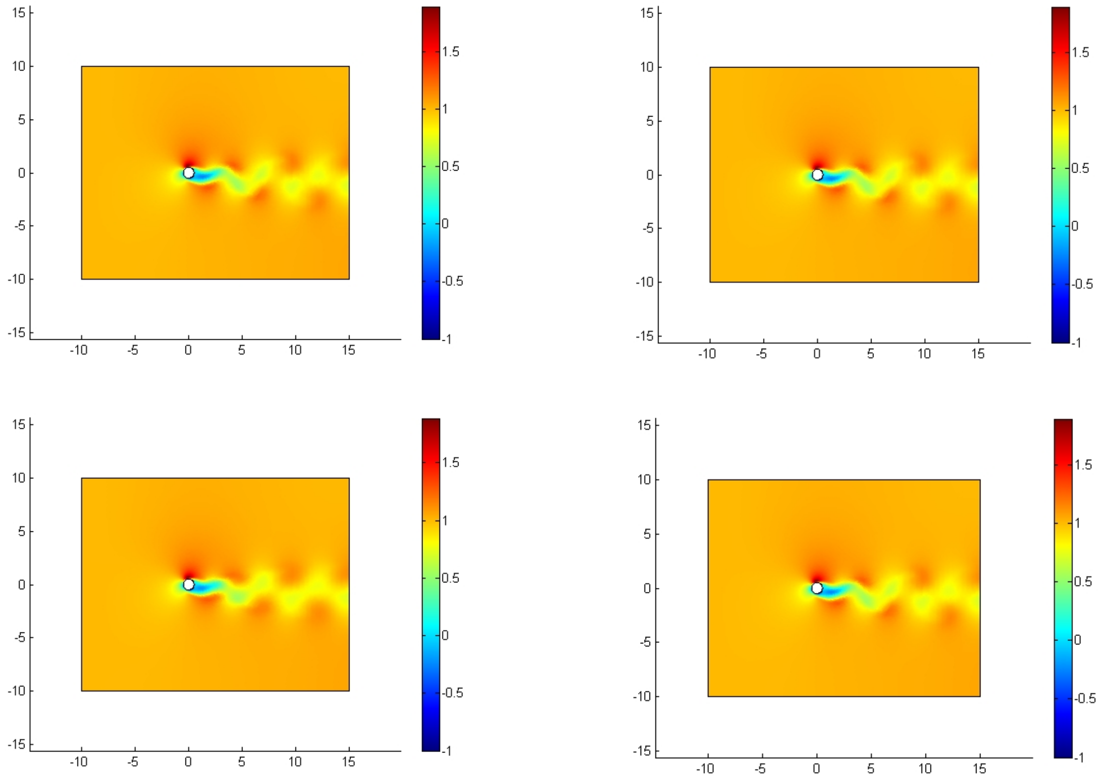
Σχήμα 4. *Πρώτη συνάρτηση βάσης (αντιστοιχεί στην πρώτη-υψηλότερη ιδιοτιμή) για τη x- (αριστερά) και την y-συνιστώσα της ταχύτητας (δεξιά).*



Σχήμα 5. *Δεύτερη συνάρτηση βάσης (αντιστοιχεί στη δεύτερη ιδιοτιμή) για τη x- (αριστερά) και την y-συνιστώσα της ταχύτητας (δεξιά).*

Το πεδίο πίεσης δε χρησιμοποιείται στη δειγματοληψία και το προκύπτον μοντέλο POD δίνει μόνο το πεδίο ταχύτητας. Από το πεδίο αυτό μπορεί να ανακτηθεί η πίεση με την επίλυση της εξίσωσης Poisson. Το πεδίο της πίεσης περαιτέρω μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη εύρεση των δυνάμεων που ασκούνται στον κύλινδρο και των συντελεστών C_L και C_D. Εφαρμόζοντας την διαδικασία POD του προηγούμενου εδαφίου, βρίσκουμε τις συναρτήσεις βάσεις Εξ. (12) και τις εκφράσεις για τους χρονικούς συντελεστές Εξ. (13). Για τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν 10 συναρτήσεις βάσης, μολονότι 2 μόνο θα ήταν αρκετές ώστε POD μοντέλο να συλλαμβάνει το 99% της «ενέργειας» των στιγμιοτύπων. Το Σχήμα 3 παρουσιάζει το μέσο πεδίο ταχύτητας όπως αυτό προκύπτει από τα στιγμιότυπα που χρησιμοποιήθηκαν. Το ίδιο πεδίο χρησιμοποιήθηκε και ως $u_C(x)$ στη συνάρτηση ελέγχου. Δεν είναι συμμετρικό όπως το αντίστοιχο στην περίπτωση στατικού κυλίνδρου, λόγω της περιστροφής του τελευταίου. Τα Σχήματα 4 και 5 εικονίζουν τις πρώτες και δεύτερες, αντίστοιχα, συναρτήσεις βάσης (που αντιστοιχούν δηλαδή στην πρώτη-υψηλότερη και τη δεύτερη ιδιοτιμή) για τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας. Είναι προφανές ότι τα σημαντικά φαινόμενα λαμβάνουν χώρα στον ομόρρου του κυλίνδρου.

Το προκύπτον POD μοντέλο χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση της ροής στις συνθήκες του πλήρους μοντέλου. Συγκεκριμένα, βρέθηκαν οι αρχικές τιμές για τους χρονικούς συντελεστές, όπως περιγράφηκε στο εδάφιο 1.4, χρησιμοποιώντας το πεδίο ταχύτητας του πλήρους μοντέλου για χρόνο 91.6. Η προσομοίωση έγινε για χρονικό διάστημα 1 περιόδου, δηλαδή χρόνο 5.9 μονάδων. Στα Σχήματα 6 και 7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του μοντέλου POD για το αρχικό και το τελικό πεδίο της x- και y-συνιστώσας της ταχύτητας, αντίστοιχα, και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του πλήρους μοντέλου.

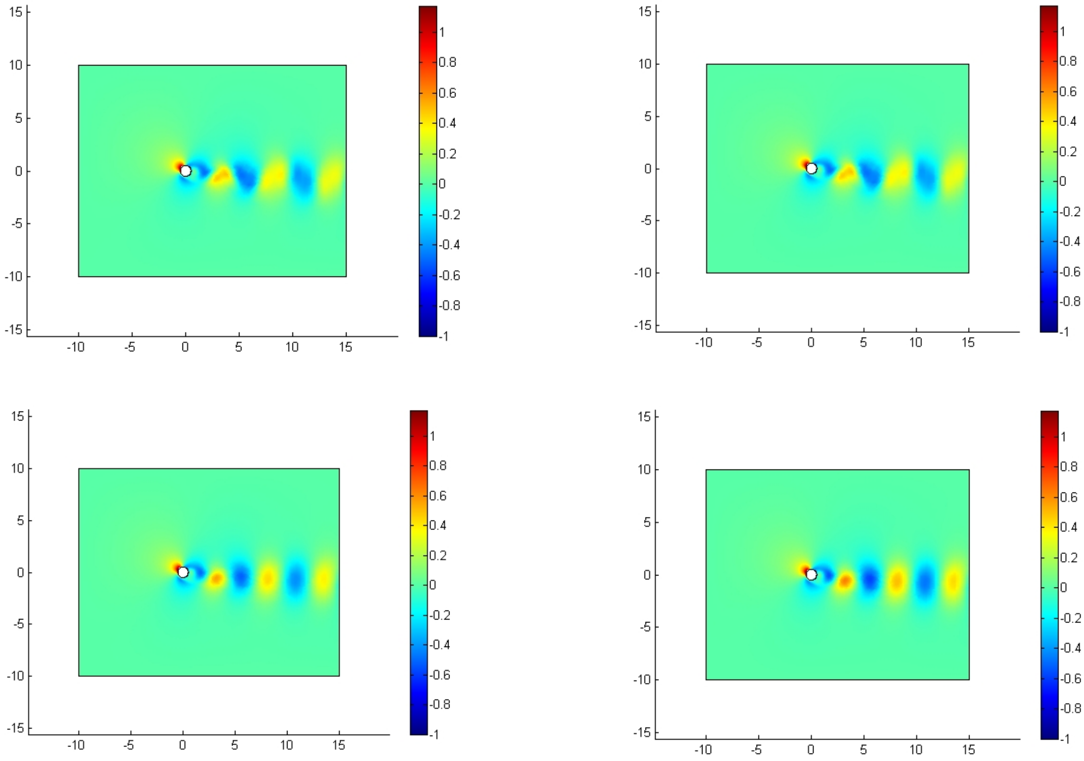


Σχήμα 6. *Πεδίο της x-συνιστώσας της ταχύτητας στην αρχή (αριστερά) και στο τέλος (δεξιά) μιας περιόδου. Πάνω: αποτελέσματα πλήρους μοντέλου. Κάτω: αντίστοιχα αποτελέσματα μοντέλου POD.*

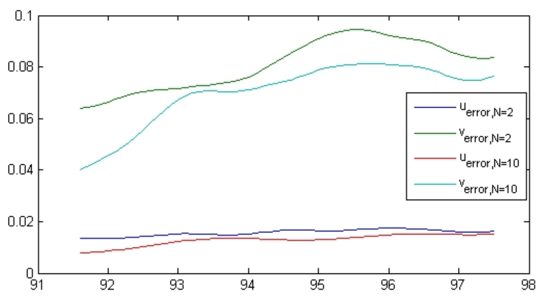
Ένας δείκτης της ποιότητας της προσέγγισης μέσω του μοντέλου ελαττωμένης τάξης είναι η χρονική εξέλιξη του απόλυτου και του σχετικού σφάλματος της μεθόδου ως προς το πλήρες μοντέλο που ορίζονται από τις σχέσεις $e_a(t) = \|u(x,t) - \hat{u}(x,t)\|$ και $e_r(t) = \|u(x,t) - \hat{u}(x,t)\| / \|u(x,t)\|$, αντίστοιχα. Στο Σχήμα 8 εικονίζεται το σχετικό σφάλμα στο χωρίο του μοντέλου POD ως προς το πλήρες στο χρόνο για τις x- και y-συνιστώσες της ταχύτητας και για πλήθη συναρτήσεων βάσης 2 και 10. Παρότι το σφάλμα είναι φθίνουσα συνάρτηση της διάστασης του μοντέλου POD, όπως φαίνεται και στο γράφημα, και τα 2 μοντέλα κρίνονται ικανοποιητικά καθώς οι τιμές σφάλματος χαμηλές. Επιπλέον, όπως προαναφέρθηκε, στο υπό μελέτη πρόβλημα, ακόμη και με 2 συναρτήσεις βάσεις είναι δυνατή η ανάκτηση πάνω από 99% της ενέργειας των στιγμιοτύπων.

Το Σχήμα 9 αναφέρεται στην προσομοίωση για χρονικά διαστήματα πέραν της μίας περιόδου. Συγκεκριμένα, απεικονίζονται τα επίπεδα τιμών σφάλματος στο εξεταζόμενο χωρίο που αντιστοιχούν σε καθεμία περίοδο προσομοίωσης, καθώς και η εξέλιξη των συνιστωσών της ταχύτητας από τα CFD και POD μοντέλα σε συγκεκριμένο σημείο του ομόρρου του κυλίνδρου. Το σφάλμα αυξάνεται με την αύξηση του χρόνου κατά την POD προσομοίωση, κάτι που διαφαίνεται και στη χρονική εξέλιξη των σημειακών ταχυτήτων. Ενώ οι ταχύτητες από τα μοντέλα CFD και POD είναι αρχικά πολύ κοντά, όσο προχωρά η προσομοίωση, το αποτέλεσμα του μοντέλου ελαττωμένης τάξης απομακρύνεται ποσοτικά και παρουσιάζει κάποια χρονική υστέρηση ως προς αυτό του πλήρους μοντέλου.

Τέλος, το υπολογιστικό κόστος του πλήρους μοντέλου CFD για προσομοίωση χρόνου μιας περιόδου είναι 449s, ενώ κόστος το για τον αντίστοιχο υπολογισμό μέσω του μοντέλου POD είναι 0.686s, δηλαδή η ελάττωση του απαιτούμενου χρόνου είναι 99.8%.



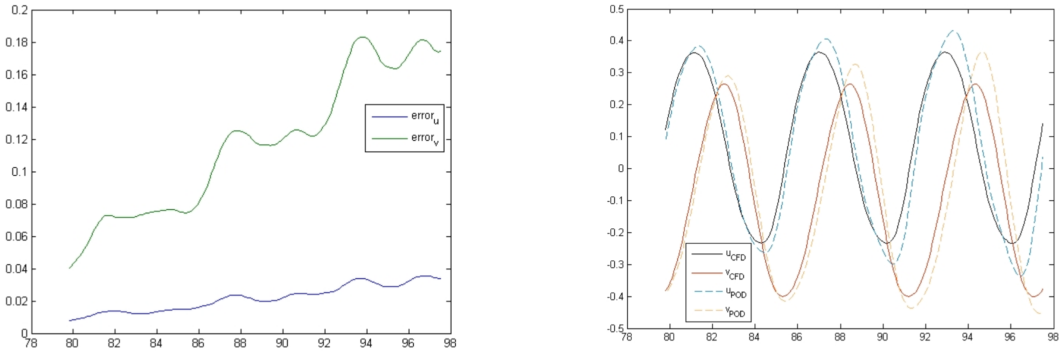
Σχήμα 7. *Πεδίο της x-συνιστώσας της ταχύτητας στην αρχή (αριστερά) και στο τέλος (δεξιά) μιας περιόδου. Πάνω: αποτελέσματα πλήρους μοντέλου. Κάτω: αντίστοιχα αποτελέσματα μοντέλου POD.*



Σχήμα 8. *Χρονική εξέλιξη του μέσου σφάλματος σε προσομοίωση 1 περιόδου για διάσταση 2 και 10 του POD μοντέλου.*

5. ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Η παρούσα εργασία αποτελεί βήμα προς την ανάπτυξη αριθμητικής μεθόδου ελέγχου ροής για την ελάττωση της έντασης του φαινομένου εκπομπής δινών σε ροή γύρω από κύλινδρο. Η «εκπαίδευση» του μοντέλου POD μέσω της μεθόδου των στιγμιοτύπων, που εδώ παρουσιάστηκε για την περίπτωση σταθερής ταχύτητας περιστροφής κυλίνδρου, θα διερευνηθεί ώστε να μπορεί να αναπαραστήσει και ροές με μεταβλητή ταχύτητας περιστροφής, ενώ στη συνέχεια θα μελετηθεί η «εκπαίδευση» του POD με παράμετρο τον αριθμό Reynolds, με στόχο την αναπαράσταση ροών διαφορετικού αριθμού Re.



Σχήμα 9. *Χρονική εξέλιξη του μέσου σφάλματος σε προσομοίωση 3 περιόδων (αριστερά) και εκδεικτική σύγκριση των πεδίων ταχύτητας σε 3 περιόδους στο σημείο (1.411,-0.0398) του ομόρρου (δεξιά).*

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Allgöwer F. and Zheng A., Nonlinear model predictive control, Springer, 2000.

Kubo Y. (2004), Prospects for the suppression of aerodynamic vibrations of a long-span bridge using boundary-layer control, J. Vibration and Control 10, p. 1359.

Gad-El-Hak M., Flow Control, Passive, Active and Reactive Flow Management, Cambridge University Press, 2000.

Weiguo X., Bonis I. and Theodoropoulos C. (2012), Linear MPC based on data-driven artificial neural networks for large-scale nonlinear distributed parameter systems, Computer Aided Chemical Engineering 30, pp. 1212-1216.

Theodoropoulos C. Optimisation and linear control of large scale nonlinear systems: a review and a suite of model reduction-based techniques, in Coping with Complexity: Model Reduction and Data Analysis, pp. 37-61. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

Bonis I., Sarimveis H. and Koubogiannis D., Proper Orthogonal Decomposition-based reduced order modeling of vortex shedding, in 5th International Conference on Experiments/Process/System Modeling/Simulation/Optimization 5th IC-EpsMsO, Athens 03-05 July, 2013.

Sirovich L. (1987), Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part I – Coherent structures. Quarterly of Applied Mathematics 45, 3:561-571.

Hotelling H. (1933), Analysis of a complex of statistical variables into principal components. Journal of Educational Psychology 24, 417-441.

Liang Y.C., Lee H.P., Lim S.P. Lin W.Z., Lee K.H. and Wu C.G., (2002) Proper orthogonal decomposition and its applications-Part I: Theory, J. of Sound and Vibration 252, 3:527-544.

Graham W.R., Peraire J. and Tang K.Y. (1999), Optimal control of vortex shedding using low-order models. Part I-Open-loop model development, Int. J. for Num. Methods in Engineering 44(7), p 945.

COMSOL AB, *Multiphysics, COMSOL User's Guide, version 3.5a, 2008.*

DEVELOPMENT OF A REDUCED ORDER MODEL FOR THE NUMERICAL SIMULATION OF THE LAMINAR FLOW AROUND A ROTATING CYLINDER

D. Koubogiannis[1], H. Sarimveis[2], I. Bonis[3]

[1]Assistant Professor (dkoubog@teiath.gr), Department of Energy Technology Engineering, Laboratory of Steam Boilers & Thermal Turbomachines, Faculty of Technological Applications, Technological Educational Institute (TEI) of Athens, Agiou Spyridonos, 14310, Egaleo, Greece

[2]Acossiate Proffesor (hsarimv@central.ntua.gr), School of Chemical Engineering, National Technical University of Athens, Iroon Polytechniou 9, 15780, Zografos, Greece

[3]Adjunct researcher (ibonis@helpe.gr), Department of Energy Technology Engineering, Laboratory of Steam Boilers & Thermal Turbomachines, TEI of Athens

Abstract

The present paper presents the reduced order modeling of the laminar flow of incompressible fluid around a rotating cylinder by means of a POD-Galerkin method. It is the sequel of a corresponding paper of the same authors concerning the same flow around a static cylinder in Reynolds number 100, for which vortex shedding is observed. In particular, it consists a step towards the development of a numerical method for the flow control around a cylinder aiming to the suppression of the vortex shedding phenomenon. This control is important due to the fatigue induced to the structures by vortex shedding and a way to achieve it is by means rotating the cylinder, with the rotation velocity being the control variable. To this end, the acceleration of the involved computational methods is required, however without harming significantly the solution reliability. The full modeling of the phenomenon relies on the use of Computational Fluid Dynamics (CFD) commercial software. The reduced order model presented herein is based on the Proper Orthogonal Decomposition (POD) of the velocity field, according to which velocity is represented by a linear combination of spatial vectors (basis functions) multiplied by temporal coefficients. The method uses a number of representative snapshots to appropriately extract a set of orthonormal basis functions spanning the solution space. A Galerkin projection of the governing flow Partial Differential Equations (PDEs) on the basis functions provides a set of Ordinary Differential Equations (SDEs) for the evolution of temporal coefficients that replace the PDEs. The results are compared with the corresponding ones of the full model in terms of their accuracy and computing time required.

ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΑ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΤΥΡΒΗ ΣΕ ΡΟΕΣ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ

Πέτρος Ι. Ιωάννου*, **Μάριος-Ανδρέας Νικολαΐδης και Ναβίτ Κ. Κωνσταντίνου**

Τμήμα Φυσικής, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα

* e-mail: pjioannou@phys.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

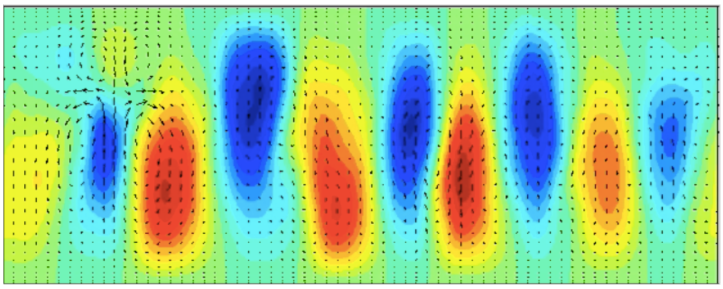
Παρουσιάζουμε αριθμητικές προσομοιώσεις στις οποίες συντηρείται τυρβώδης κατάσταση στα $Re_\tau = 970$ με μία μόνο μη μηδενική αρμονική στη διεύθυνση της ροής και χωρίς καμία άλλη παρέμβαση στις εξισώσεις Navier-Stokes. Η τυρβώδης κατάσταση λειτουργεί με τον αναγεννητικό κύκλο (self-sustaining process – SSP) που συντηρεί την τυρβώδη κατάσταση σε διατμητικές τυρβώδεις ροές. Η εύρεση της απλοποιημένης αυτής τυρβώδους κατάστασης μπορεί να οδηγήσει στη κατανόηση του αναγεννητικού κύκλου SSP και στην εξεύρεση μεθόδων ελέγχου της τυρβώδους ροής πέραν της γραμμικής θεωρίας.

Λέξεις κλειδιά: τυρβώδης ροή, συνεκτικές δομές, στατιστική δυναμική, έλεγχος τυρβώδους κατάστασης

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η τύρβη σε διατμητικές ροές συντηρείται από την ενέργεια που προέρχεται από την κλίση της μέσης ταχύτητας της ροής. Όταν η μέση ροή έχει σημεία καμπής τότε η τύρβη τροφοδοτείται μέσω των μεγάλης κλίμακας υδροδυναμικών ασταθειών. Οι περισσότερες όμως μέσες ροές σε αγωγούς δεν έχουν σημεία καμπής και ο τρόπος τροφοδότησης της τύρβης είναι περισσότερο δαιδαλώδης. Υπάρχει πλέον γενική συμφωνία ότι η τύρβη συντηρείται σε αυτές τις ροές μέσω ενός αναγεννητικού κύκλου (self-sustaining process – SSP) μέσω του οποίου μεταφέρεται ενέργεια από τη μέση ροή στην τύρβη. Ο κύκλος αυτός, που προτάθηκε από τους Hamilton et al. (1995), Waleffe (1997), εκμεταλλεύεται και τις τρεις διαστάσεις της ροής μέσω μεγάλης κλίμακας συνεκτικών δομών[1] που χαρακτηρίζουν καθολικά όλες τις τυρβώδεις διατμητικές ροές και οι οποίες διαμορφώνουν μέση ροή με σημεία καμπής στη διεύθυνση κατά το πλάτος του αγωγού. Οι δομές αυτές κοντά στα τοιχώματα (near-wall region) αποτελούνται κυρίως από μία σειρά κυλινδρικών στροβίλων (rolls) με άξονες στη διεύθυνση της ροής και με σχεδόν δισδιάστατο πεδίο ταχυτήτων, και εκεί που η ταχύτητα των στροβίλων απομακρύνεται από τα τοιχώματα, εμφανίζεται μείωση της ταχύτητας στη διεύθυνση της μέσης ροής (low speed streak), ενώ όπου η ταχύτητα των στροβίλων είναι προς τα τοιχώματα εμφανίζεται προσαύξηση (high speed streak) (βλ. Σχ. 1). Οι μεγάλες αυτές συνεκτικές δομές συνοδεύονται από μικρότερες διαταραχές διατεταγμένες σε σχήμα V που αναφέρονται γενικώς ως κεκλιμένες διαταραχές (oblique perturbations). Οι κυρίαρχες δομές αυτές παρατηρήθηκαν πρώτα σε πειράματα με χρήση φυσαλίδων υδρογόνου (Kline et al. 1967) και αργότερα σε άμεσες αριθμητικές προσομοιώσεις (direct numerical simulations – DNS) της τυρβώδους κατάστασης σε σωλήνες (π.χ. Kim et al. (1987)). Τελευταίες προσομοιώσεις παρουσιάζουν ανάγλυφη αποτύπωση και των δύο τύπων συνεκτικών δομών (βλ. Wu and Moin (2009)). Επιπλέον, έγινε αντιληπτό σε τυρβώδεις ροές σε πολύ υψηλούς

[1] Με τον όρο συνεκτικές δομές εννοούμε οργανωμένες κινήσεις που έχουν χρονική και χωρική συνοχή και εμπεριέχουν σημαντικό ποσοστό της ενέργειας της ροής.



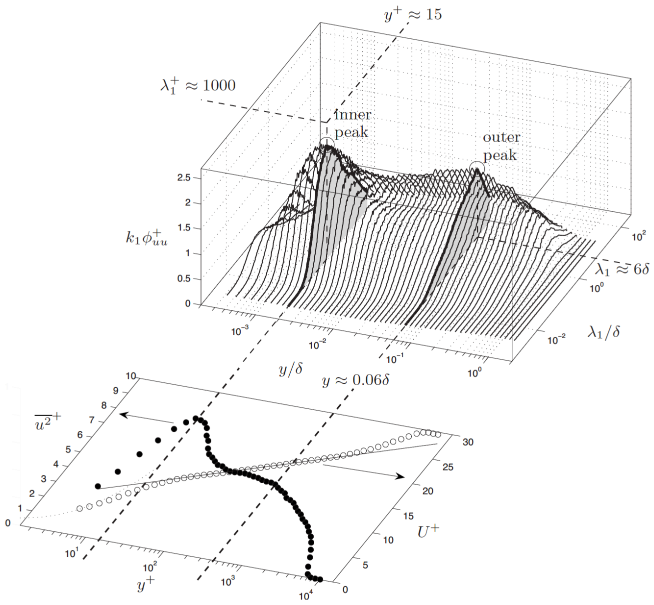
Σχήμα 1: Οι ισοϋψείς της $U_s = U - [U]$, όπου U η στιγμιαία μέση, ως προς x, x ταχύτητα και $[U]$ το μέσο προφίλ της ταχύτητας ($[U]$ συμβολίζει την μέση τιμή ως προς z) και το πεδίο ταχυτήτων (V, W) στο επίπεδο (y, z) από προσομοίωση τυρβώδους ροής Couette με $Re = 1000$, βασισμένου στην ημιαπόσταση δ μεταξύ των τοιχωμάτων. Διακρίνονται οι μεγάλες συνεκτικές δομές: με τα βέλη οι στρόβιλοι (rolls) και με το χρώμα οι προσαυξήσεις της x ταχύτητας (streaks). Δεδομένου ότι η μέση ροή αυξάνεται με το y, όπου $V > 0$ θα προκληθεί μείωση του U_s, και αντίστοιχα όπου $V < 0$ αύξηση. Στο σχήμα φαίνεται ότι οι προσαυξήσεις ενισχύονται από τους στροβίλους. Επειδή όμως οι προσαυξήσεις και οι μεταβολές τους δεν συμπίπτουν ακριβώς προκαλείται η συνεχής μετατόπιση των προσαυξήσεων στην τυρβώδη κατάσταση.

αριθμούς Reynolds ότι υπάρχουν και αντίστοιχες συνεκτικές δομές στο λογαριθμικό στρώμα που είναι ιδιαίτερα επιμήκεις που ονομάστηκαν "υπερδομές" ή VLSM (βλ. Toh and Itano (2005), Marusic et al. (2010)). Στο Σχ. 2 παρουσιάζεται το ενεργειακό φάσμα των διαταραχών[2] από πρόσφατες εργαστηριακές παρατηρήσεις των Hutchins and Marusic (2007b) σε υψηλούς αριθμούς Re.

Η προέλευση και η διατήρηση αυτών των συνεκτικών δομών στα εσωτερικά και εξωτερικά στρώματα της ροής είναι κεντρικό και θεμελιώδες ερώτημα στο οποίο υπάρχουν δύο σχολές σκέψης. Ο πρώτος τρόπος σκέψης επιχειρεί να εξηγήσει με κατ' ουσίαν γραμμικές διεργασίες τις συνεκτικές αυτές δομές. Οι δομές θεωρούνται ότι σχηματίζονται από αστάθειες της μέσης ροής ή από μεταβατική αύξηση της ενέργειας των διαταραχών που προκαλείται κατά την αλληλεπίδραση με τη μέση τυρβώδη ροή (βλ. π.χ. Schoppa and Hussain (2002)). Υπό αυτή την άποψη οι συνεκτικές δομές οργανώνονται μέσω της παθητικής απόκρισης της γραμμικής δυναμικής στο άτακτο διαταρακτικό πεδίο που χαρακτηρίζει τη τυρβώδη κατάσταση χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ανάδραση της μέσης ροής στη διαμόρφωση του πεδίου αυτού. Το γεγονός όμως ότι μια τέτοια θεώρηση μπορεί να αναπαράγει το διαταρακτικό ενεργειακό φάσμα του Σχ. 2 αναδεικνύει το καθοριστικό ρόλο της μέσης ροή στην οργάνωση της τύρβης (del Álamo and Jiménez 2006, Farrell and Ioannou 1998). Ο δεύτερος τρόπος σκέψης θεωρεί ότι οι δομές αυτές προέρχονται από καθαρά μη-γραμμικές διεργασίες π.χ. από την άμεση μη-γραμμική αλληλεπίδραση κεκλιμένων διαταραχών (βλ. Benney (1960)), είτε τη διάσπαση και επανένωση στροβίλων (Adrian 2007).

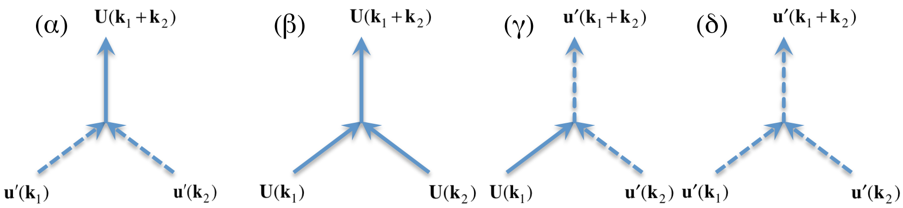
Προσφάτως προτάθηκε ένας νέος μηχανισμός για τον σχηματισμό των συνεκτικών δομών από τους Farrell and Ioannou (2012) που συνδυάζει τους δύο τρόπους σκέψης και στον οποίο και εδράζεται και η εργασία που θα παρουσιάσουμε. Ας θεωρήσουμε αγωγούς με τοιχώματα παράλληλα στο επίπεδο (x, z) και έστω ότι αρχικά η μέση ροή, $U(y)\hat{\mathbf{x}}$, με διεύθυνση τον άξονα x, είναι ομογενής στη z διεύθυνση, κατά το πλάτος του αγωγού, και εξαρτάται μόνο από τη κάθετη στα τοιχώματα διεύθυνση, y. Αν αυτή η ροή συνοδεύεται με τύρβη τότε η τύρβη πρέπει να είναι και αυτή στατιστικά ομογενής στη διεύθυνση z και η ομογενής αυτή κατάσταση στη διεύθυνση z αποτελεί σημείο ισορροπίας της στατιστικής δυναμικής της ροής, δηλαδή σημείο ισορροπίας των στατιστικών ροπών της ροής. Το ενδιαφέρον είναι ότι αυτή η z ομογενής κατάσταση ισορροπίας καθίσταται στατιστικά ασταθής για αρκούντως μεγάλο αριθμό Re

[2] Ποσότητες εξεφρασμένες σε εξωτερικές μονάδες αδιαστατικοποιούνται με μονάδα μήκους την ημιαπόσταση h (ή δ) μεταξύ των τοιχωμάτων και μονάδα χρόνου το h/u_τ και ο αριθμός Reynolds σε αυτές τις μονάδες είναι $Re_\tau = u_\tau h/\nu$ όπου $u_\tau = \sqrt{\nu \, \mathrm{d}U/\mathrm{d}y|_{\mathrm{w}}}$ είναι η ταχύτητα αντίστασης (friction velocity) και $\mathrm{d}U/\mathrm{d}y|_{\mathrm{w}}$ είναι η κλίση της μέσης ροής στα τοιχώματα. Ποσότητες σε εσωτερικές μονάδες συμβολίζονται με $^+$, και σε αυτή τη περίπτωση οι ταχύτητες έχουν αδιατατικοποιηθεί με την u_τ και τα μήκη έχουν αδιαστατικοποιηθεί με ν/u_τ.



Σχήμα 2: Οι εσωτερικές και εξωτερικές κορυφές στο ενεργειακό φάσμα $\overline{u^2}$ των διαταραχών του πεδίου ταχύτητας κατά τη διεύθυνση της ροής, x, σε οριακό στρώμα με $Re_\tau = 7300$ από παρατηρήσεις των Hutchins and Marusic (2007b) αντιστοιχούν με τις επιμήκεις συνεκτικές δομές του αναγεννητικού κύκλου (SSP) στην εσωτερική περιοχή αλλά και με τις “υπερδομές” ή VLSM στο εξωτερικό της ροής στο λογαριθμικό στρώμα. Στη κάτω γραφική παράσταση σχεδιάζεται η αντιστοιχούσα μέση ροή (ανοικτοί κύκλοι) καθώς και η μεταβολή του $\overline{u^2}$ συναρτήσει της απόστασης από τα τοιχώματα y^+. Εδώ με k_1 συμβολίζουν οι συγγραφείς τον x κυματαριθμό και με λ_1 το μήκος κύματος.

και η ομογένεια στη z διεύθυνση καταστρέφεται με την εμφάνιση συνεκτικών δομών με x κυματαριθμό $k_x = 0$. Οι συνεκτικές δομές αυτές αποτελούνται από στρόβιλους συνοδευόμενους με προσαυξήσεις στην x μέση ταχύτητα, όπως στο Σχ. 2. Η αστάθεια αυτή βασίζεται στην εξής καταπληκτική ιδιότητα που έχει καθολική ισχύ: αν η μέση ροή διαταραχθεί κατ'ελάχιστον και με οποιονδήποτε τρόπο στον άξονα z με προσαύξηση και μείωση ταχύτητας U, τότε η παραμόρφωση αυτή της ροής διαταράσσει τη στατιστική ομογένεια της τύρβης με τέτοιο τρόπο ώστε η τύρβη να δημιουργεί τους κατάλληλους στρόβιλους οι οποίοι και ενισχύουν την αρχική παραμόρφωση. Αυτή η ανάδραση μεταξύ τύρβης και μέσης ροής οδηγεί στο σχηματισμό των συνεκτικών δομών αλλά και επιτρέπει την αέναη συνύπαρξη στροβίλων (rolls) και προσαυξήσεων του πεδίου ταχυτήτων (streaks) όταν η ροή είναι τυρβώδης. Η ανάδραση αυτή αποτελεί δηλαδή τη δυναμική βάση του αναγεννητικού κύκλου SSP. Σε αυτή τη θεώρηση η μόνη δυναμική διαδικασία είναι η μη-γραμμική αλληλεπίδραση μεταξύ των στροβίλων, των προσαυξήσεων των μέσων ταχυτήτων (δύο πεδία με μηδενικό κυματαριθμό, $k_x = 0$, στη διεύθυνση της ροής x) και των διαταραχών (το πεδίο ταχυτήτων με $k_x \neq 0$). Ο SSP συντελείται λόγω της ασταθούς ανάδρασης που περιγράψαμε προηγουμένως. Επειδή η αστάθεια είναι στατιστική, εκδηλώνεται μόνο αν εξετάσουμε τη στατιστική δυναμική της ροής, δηλαδή το άπειρο σύστημα όλων των στατιστικών ροπών της ροής (βλ. Hopf (1952) και Frisch (1995)). Δεδομένου όμως ότι αφορά μόνο στην αλληλεπίδραση μεταξύ της μέσης ροής και των διαταραχών, η εκδήλωση αυτής της θεμελιώδους αστάθειας επιτυγχάνεται με τον περιορισμό του συστήματος των στατιστικών ροπών στο σύστημα που ορίζεται από τις πρώτες δύο στατιστικές ροπές και αγνοώντας τις άλλες. Αυτή η προσέγγιση της στατιστικής δυναμικής φέρει το όνομα S3T (Stochastic structural stability theory) ή CE2 (second order cumulant expansion) (βλ. Farrell and Ioannou (2003), Marston et al. (2008)) και αποδεικνύεται ότι προκύπτει αν θεωρήσουμε τη στατιστική δυναμική των εξισώσεων Navier-Stokes (NS) κρατώντας στη διεύθυνση της ροής μόνο τις μη-γραμμικές αλληλεπιδράσεις α) μεταξύ διαταραχών με αντίθετους κυματαριθμούς στη διεύθυνση της ροής (δηλαδή το k_{x1} αλληλεπιδρά με το k_{x2} μόνο αν $k_{x2} = -k_{x1}$, οπότε η αλληλεπίδραση οδηγεί στο σχηματισμό μέσης ροής με $k_x = 0$) και β) μεταξύ διαταραχών $k_x \neq 0$ και της μέσης ροής $k_x = 0$. Όλες οι αλληλεπι-



Σχήμα 3: Σχεδιάγραμμα των αλληλεπιδράσεων μεταξύ κυματαριθμών της μέσης ροής $\mathbf{U}(\mathbf{k})$ με κυματαριθμό $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ με $k_x = 0$ και των διαταραχών $\mathbf{u}'(\mathbf{k})$ με $k_x \neq 0$. Στις εξισώσεις για τη μέση ροή (1α΄) περιλαμβάνονται αλληλεπιδράσεις (α) με τις οποίες οι διαταραχές με κυματαριθμούς $\mathbf{k}_1 = (k_x, k_{y1}, k_{z1})$ και $\mathbf{k}_2 = (-k_x, k_{y2}, k_{z2})$ επιδρούν στη μέση ροή και (β) με τις οποίες μέσα πεδία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η αλληλεπίδραση (β) προκαλεί τις προσαυξήσεις στη μέση ταχύτητα (streaks) ενώ μέσω των (α) σχηματίζονται οι μέσοι στροβίλοι (rolls). Και οι δύο αλληλεπιδράσεις περιλαμβάνονται στην αντίστοιχη εξίσωση RNL (2α΄). Στις εξισώσεις για τις διαταραχές (1β΄) περιλαμβάνονται οι αλληλεπιδράσεις (γ) μεταξύ μέσης ροής και διαταραχών και οι αλληλεπιδράσεις (δ) μεταξύ διαταραχών με $k_{x1} \neq -k_{x2}$. Οι (γ) ευθύνονται για την αστάθεια ή τη μεταβατική αύξηση των διαταραχών και συμπεριλαμβάνονται στην αντίστοιχη εξίσωση RNL (2β΄), ενώ οι αλληλεπιδράσεις (δ) δεν συμπεριλαμβάνονται. Ο αποκλεισμός των αλληλεπιδράσεων (δ) επιτρέπει στη στατιστική δυναμική των RNL εξισώσεων να προσδιορίζεται πλήρως από τις δύο πρώτες ροπές.

δράσεις των κυματαριθμών στις άλλες διευθύνσεις περιλαμβάνονται πλήρως. Αυτή η RNL (Restricted Nonlinearity) προσέγγιση των NS παράγει εξισώσεις με τις ίδιες διατηρήσιμες ποσότητες όπως και η NS και έχει το πλεονέκτημα ότι η στατιστική δυναμική του RNL συστήματος κλείνει και αντιστοιχεί στο κλείσιμο δεύτερης τάξης της στατιστικής δυναμικής των εξισώσεων NS (Marston et al. 2008). Η RNL προσέγγιση των NS παράγει τυρβώδη κατάσταση παρόμοια με αυτήν της DNS σε ροές Couette (Thomas et al. 2014) και σε ροές Poiseuille (Constantinou et al. 2014). Θα παρουσιάσουμε μερικά χαρακτηριστικά της RNL δυναμικής και θα δείξουμε ότι η RNL ασυμπτωτικά καταλήγει να συντηρεί μια απλοποιημένη τυρβώδη κατάσταση η οποία αποκαλύπτει τα ελάχιστα συστατικά δυναμικά στοιχεία που απαιτούνται για τη συντήρηση τυρβώδους κατάστασης με τα ίδια μακροσκοπικά χαρακτηριστικά με αυτά των DNS.

2. Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ RNL ΚΑΙ Η ΑΠΟΚΛΙΜΑΚΩΣΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

Θεωρήστε μία επίπεδη ροή Poiseuille υπό πίεση Gx, όπου x η διεύθυνση της ροής. Η κάθετη στη τοιχώματα διεύθυνση είναι y και η κατά πλάτος διεύθυνση z. Το μήκος του αγωγού στην x, y και z διεύθυνση είναι αντίστοιχα L_x, $2h$ και L_z. Τα τοιχώματα είναι στα $y/h = 0$ και 2. Μέσες τιμές ως προς τη διεύθυνση της ροής x συμβολίζονται με $\overline{\bullet} = L_x^{-1} \int_0^{L_x} \bullet \, \mathrm{d}x$, και μέσες τιμές ως προς την κατά πλάτος διεύθυνση z με $[\bullet] = L_z^{-1} \int_0^{L_z} \bullet \, \mathrm{d}z$. Η ταχύτητα, $\mathbf{u}$, αναλύεται στη μέση τιμή της κατά τη διεύθυνση της ροής, $\mathbf{U}(y, z, t)$, και την απόκλιση από τη μέση τιμή (διαταραχή), $\mathbf{u}'(x, y, z, t)$, οπότε η ταχύτητα της ροής είναι: $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$. Οι x, y, z συνιστώσες της $\mathbf{U}$ είναι (U, V, W) και οι συνιστώσες της $\mathbf{u}'$ είναι (u', v', w'). Η βαθμίδα της πίεσης ομοίως εκφράζεται ως: $\nabla p = \nabla\left(-Gx + P(y, z, t) + p'(x, y, z, t)\right)$. Οι εξισώσεις NS με αυτή την ανάλυση ισοδυναμούν με το σύστημα εξισώσεων:

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - G\hat{\mathbf{x}} + \nabla P - \nu \Delta \mathbf{U} = -\overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'} \,, \tag{1α΄}$$

$$\partial_t \mathbf{u}' + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{p}' - \nu \Delta \mathbf{u}' = -\left(\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' - \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}\right) \,, \tag{1β΄}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \,, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \,, \tag{1γ΄}$$

με ν τον συντελεστή κινηματικού ιξώδους. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ της μέσης ροής και των διαταραχών που περιλαμβάνονται στο παραπάνω σύστημα περιγράφονται στο Σχ. 3. Η προσέγγιση RNL προκύπτει με τον αποκλεισμό των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των διαταταχών στην εξίσωση των διαταραχών (1β′) (βλ. Σχ. 3). Το σύστημα RNL είναι συνεπώς:

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U} - G\hat{\mathbf{x}} + \nabla P - \nu\Delta\mathbf{U} = -\overline{\mathbf{u}'\cdot\nabla\mathbf{u}'}\,, \tag{2α′}$$

$$\partial_t \mathbf{u}' + \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\cdot\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{p}' - \nu\Delta\mathbf{u}' = 0\,, \tag{2β′}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{U} = 0\,,\quad \nabla\cdot\mathbf{u}' = 0\,. \tag{2γ′}$$

Οι RNL εξισώσεις έχουν τις ίδιες διατηρήσιμες ποσότητες και παράγει ροή που έχει πεπερασμένη ολική ενέργεια όπως και οι NS. Το πεπερασμένο της ενέργειας των διαταραχών στη προσέγγιση RNL έχει μία σημαντική επίπτωση. Έστω ότι έχει προσδιορισθεί η εξέλιξη του συστήματος RNL και είναι γνωστή η χρονική εξέλιξη των δύο πεδίων $\mathbf{U}(y,z,t)$ και $\mathbf{u}'(x,y,z,t)$, τα οποία είναι πεπερασμένα. Τότε για το συγκεκριμένο $\mathbf{U}(y,z,t)$ το πεδίο $\mathbf{u}'(x,y,z,t)$ θα μπορούσε να προσδιορισθεί επιλύοντας την (2β′), η οποία υπό αυτή την έννοια είναι μία γραμμική εξίσωση που συμβολικά θα μπορούσε να γραφεί ως:

$$\partial_t \mathbf{u}' = \mathbf{A}(\mathbf{U})\,\mathbf{u}'\,, \tag{3}$$

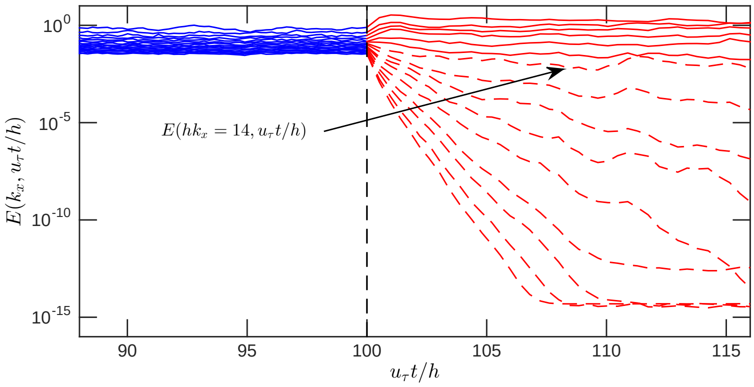
όπου $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ ένας γραμμικός χρονοεξαρτώμενος τελεστής με χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov ακριβώς ίσο με το μηδέν και με το $\mathbf{u}'$ αναγκαστικά να περιορίζεται[3] στον υποχώρο που παράγεται από τον $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ που αντιστοιχεί στο μέγιστο αυτό μηδενικό αριθμό Lyapunov (βλ. Farrell and Ioannou (2012)). Αυτή η ιδιότητα της δυναμικής RNL οδηγεί σε απόσταξη του διαταρακτικού πεδίου της τυρβώδους ροής, αποκλιμακώνοντας τις διαταραχές και υποστηρίζοντας μόνο τις δομές του υποχώρου του τελεστή $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ που αντιστοιχεί στο μηδενικό αριθμό Lyapunov. Αυτή η φυσική απόσταξη και αποκλιμάκωση αποκαλύπτει τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας που ευθύνονται για τη διατήρηση της τύρβης.

Πίνακας 1: Παράμετροι των προσομοιώσεων: το μήκος και πλάτος του αγωγού $[L_x, L_z]/h$, ο αριθμός των αρμονικών Fourier N_x, N_z που έχουν κρατηθεί στη προσομοίωση και N_y ο αριθμός των πολυωνύμων Chebyshev. Re_τ είναι ο αριθμός Reynolds της προσομοίωσης που είναι βασισμένο στη ταχύτητα αντίστασης και $[L_x^+, L_z^+]$ είναι το μέγεθος του αγωγού εξεφρασμένο σε εσωτερικές μονάδες.

Σύντμηση	$[L_x, L_z]/h$	$N_x \times N_z \times N_y$	Re_τ	$[L_x^+, L_z^+]$
NS950	$[\pi\ ,\ \pi/2]$	$256 \times 255 \times 385$	939.9	$[2953, 1476]$
RNL950	$[\pi\ ,\ \pi/2]$	$256 \times 255 \times 385$	882.4	$[2772, 1386]$
RNL950k_x12	$[\pi\ ,\ \pi/2]$	$3 \times 255 \times 385$	970.2	$[3048, 1524]$

Θα παρουσιάσουμε εδώ τα αποτελέσματα από μερικά πειράματα που έγιναν πρόσφατα στο Πολυτεχνείο της Μαδρίτης με τους DNS κώδικες του Javier Jimenéz (Constantinou et al. 2014). Τα πειράματα αυτά έγιναν σε σχετικά υψηλούς αριθμούς Reynolds ($Re_\tau = 950$) και είχαν ως σκοπό να συγκριθεί η τύρβη που αναπτύσσεται σε DNS με αυτήν σε RNL. Οι διαστάσεις του αγωγού και οι παράμετροι των πειραμάτων που θα παρουσιάσουμε συνοψίζονται στον Πίν. 1. Στα πειράματα επιβάλλονται περιοδικές συνθήκες στις διευθύνσεις x και z. Η προσομοίωση DNS ακολουθείται από προσομοίωση RNL με τον αποκλεισμό των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των διαταραχών κάποια χρονική στιγμή. Μία τέτοια εξέλιξη που δείχνει την αποκλιμάκωση της τυρβώδους ροής παρουσιάζεται στο Σχ. 4. Σύγκριση του ενεργειακού φάσματος του DNS με RNL στα $y^+ = 20$ δείχνει ότι και το RNL συντηρεί συνεκτικές δομές οι οποίες όμως έχουν ευθυγραμμισθεί (βλ. Σχ. 5). Δηλαδή, ενώ στο DNS το μέγιστο της φασματικής ενέργειας εμφανίζεται σε επιμήκεις συνεκτικές δομές με χαρακτηριστικό μήκος $\lambda_x^+ = 1000$ στην δυναμική RNL το αντίστοιχο χαρακτηριστικό μήκος είναι $\lambda_x^+ = L_x^+$, όσο και το μήκος του περιοδικού καναλιού. Νεώτερες προσομοιώσεις μάλιστα έχουν δείξει ότι η ευθυγράμμιση αυτή των διαταραχών που αντιστοιχεί σε μεταφορά του μέγιστου της ενέργειας στη κλίμακα του μήκους του αγωγού συμβαίνει ακόμα και για αγωγούς οι

[3] Αν ο $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ είναι χρονοανεξάρτητος το $\mathbf{u}'$ ασυμπτωτικά συγκλίνει στην ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στη ιδιοτιμή του $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ με το μέγιστο πραγματικό μέρος. Η αντίστοιχη πρόταση για χρονοεξαρτώμενους τελεστές είναι αυτή του κειμένου.



Σχήμα 4: DNS μέχρι το χρόνο $u_\tau t/h = 100$ ακολουθείται από RNL. Σχεδιάζουμε την ενέργεια των πρώτων 15 αρμονικών Fourier ($hk_x = 2, 4, \ldots, 30$) των διαταραχών ($k_x \neq 0$). Η ενέργεια μειώνεται μονότονα με τον κυματαριθμό k_x. Η RNL δυναμική διατηρεί την τυρβώδη κατάσταση μόνο με διαταρακτικό πεδίο που έχει ενέργεια στις πρώτες 6 x-αρμονικές με $hk_x = 2, 4, 5, 8, 10, 12$ ενώ όλες οι άλλες αρμονικές με $hk_x \geq 14$ μηδενίζονται (διάστιχτες γραμμές). Οι παράμετροι των προσομοιώσεων είναι στον Πίνακα 1.

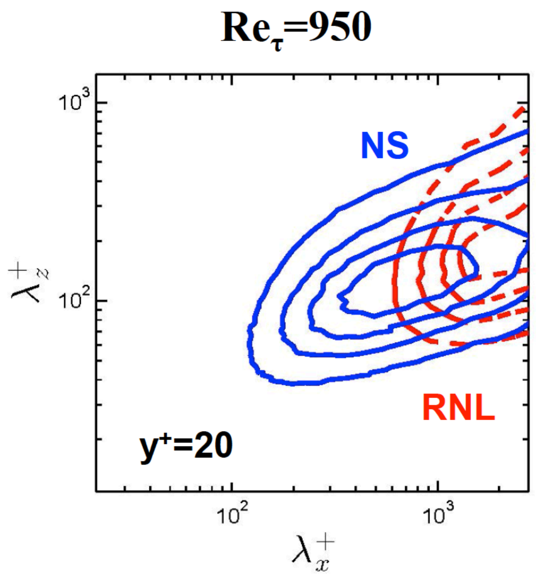
οποίοι είναι δύο τάξεις μεγέθους πιο επιμήκεις από αυτόν του Πιν. 1. Τα αποτελέσματα αυτά μας οδηγούν στο να διατυπώσουμε την εικασία ότι το μέγιστο του φάσματος θα μεταφερθεί στο άπειρο για αγωγούς απείρου μήκους και αριθμούς Reynolds που τείνουν στο άπειρο. Μία τέτοια υπόθεση είναι τουλάχιστον συμβατή με τις παρατηρήσεις των Hutchins and Marusic (2007a) στο ουδέτερης σταθερότητας οριακό στρώμα στα Salt-flats της ερήμου της Nevada σε αριθμούς $Re_\tau = 660000$, στις οποίες η ενέργεια ήταν επικεντρωμένη σε συνεκτικές δομές στις μεγαλύτερες διαστάσεις που μπορούσε να διακρίνει το πείραμα.

3. ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΣΕ ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΑ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΤΥΡΒΗ

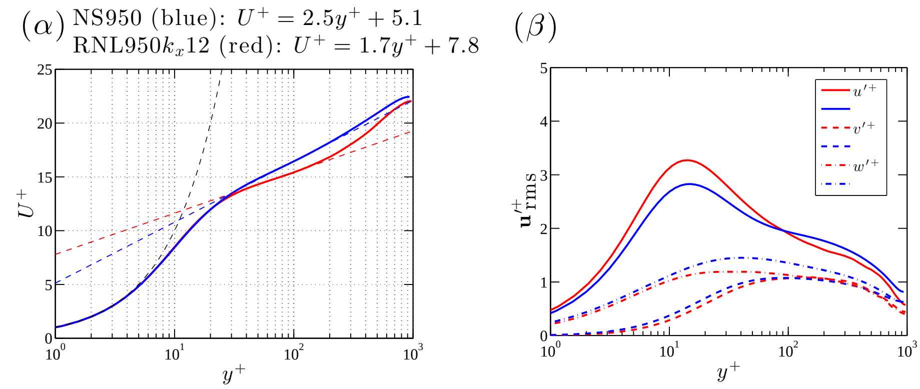
Είδαμε ότι με τη προσέγγιση RNL η τυρβώδης κατάσταση αποκλιμακώνεται και συντηρείται από την αλληλεπίδραση ενός διαταρακτικού πεδίου που αποτελείται από ένα μικρό αριθμό x αρμονικών με $k_x \neq 0$ και της μέσης ροής με $k_x = 0$. Τίθεται το ερώτημα: Πόσο μπορούμε να αποκλιμακώσουμε το διαταρακτικό πεδίο; Μπορούμε π.χ. να συντηρήσουμε την τυρβώδη κατάσταση με την αλληλεπίδραση μόνο μίας x αρμονικής με $k_x \neq 0$ με τη μέση ροή; Προς τούτο στο πλαίσιο της δυναμικής RNL επιτρέψαμε μόνο μία αρμονική στο διαταρακτικό πεδίο και δείξαμε ότι η τυρβώδης κατάσταση συντηρείται με την αλληλεπίδραση των διαταραχών με $k_x h = 12$ και της μέσης ροής $k_x = 0$. Η σύγκριση της μέσης ταχύτητας της τυρβώδους κατάστασης σε αυτό το RNL και με το αντίστοιχο DNS, καθώς και της μέσης τετραγωνικής ρίζας των διακυμάνσεων της ταχύτητας της ροής στο Σχ. 6 δείχνει ότι η απλοποιημένη τυρβώδης κατάσταση έχει ρεαλιστική δομή. Παρά την εξαιρετική απλοποίηση η τύρβη αναπτύσσει λογαριθμικό στρώμα, με διαφορετική όμως σταθερά Karman, και εμφανίζει συνεκτικές δομές που κυριαρχούν στη δυναμική.
Η γεωμετρία της τύρβης σε αυτή την περίπτωση αποτελείται από δομές απείρου μήκους με το πεδίο μέσης ταχύτητας στη διεύθυνση της μέσης ροής $U(y, z, t)$ όπως αυτό του Σχ. 7(α) στο οποίο διακρίνονται οι προσαυξήσεις του πεδίου ταχυτήτων και η μέση ροή περιλαμβάνει ένα πυκνό πλέγμα απείρων κυλινδρικών στροβίλων με στροβιλότητα στη διεύθυνση της ροής, όπως διαφαίνεται στο Σχ. 7(γ). Η ταχύτητα u' των διαταραχών που αντιστοιχούν στον κυματαριθμό $hk_x = 12$ σχεδιάζεται στο Σχ. 7(β). Το διαταρακτικό αυτό πεδίο ταχυτήτων σχηματίζει του άπειρους στρόβιλους του Σχ. 7(γ).

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

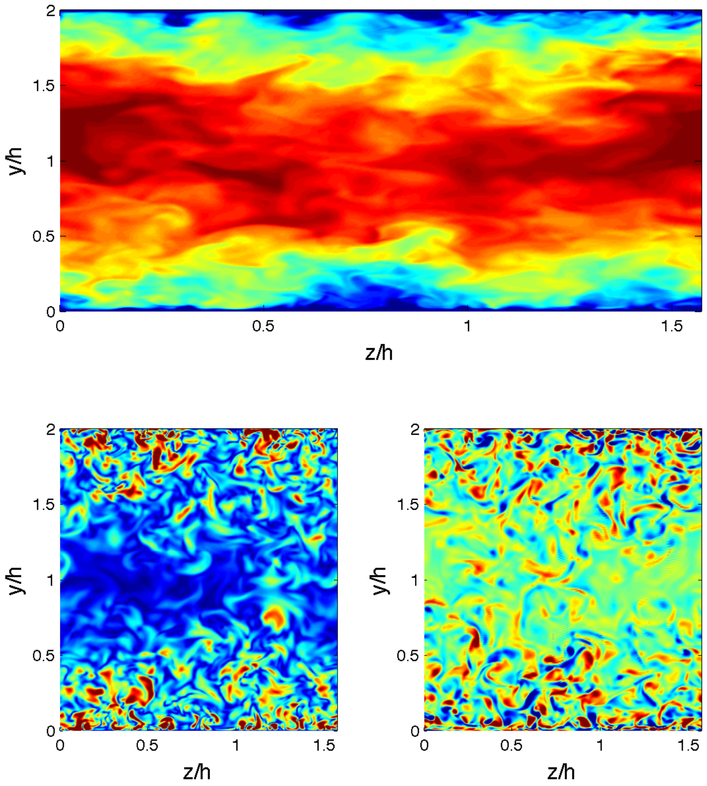
Ανάλυση της στατιστικής δυναμικής της τυρβώδους ροής σε παράλληλους αγωγούς αποκάλυψε μία θεμελιώδη στατιστική αστάθεια η οποία καταστρέφει την τυχόν ομογένεια της τύρβης στην κατά πλάτος διεύ-



Σχήμα 5: Ισοϋψεις του προπολλαπλασιασμένου φάσματος της ενέργειας $k_x k_z E_{uu}(k_x, k_z)$ της ροής στη διεύθυνση x σε απόσταση $y^+ = 20$ από τον τοίχο του καναλιού, ως συνάρτηση των μήκων κύματος λ_x^+ και λ_z^+ για τις προσομοιώσεις NS950 (συνεχείς γραμμές) and RNL950 (διάστιχτες γραμμές). Οι ισοϋψείς αντιστοιχούν σε (0.2,0.4,0.6,0.8) επί της μέγιστης τιμής του προπολλαπλασιασμένου φάσματος της ενέργειας. Οι μέγιστες τιμές των λ_x^+ και λ_y^+ είναι οι διαστάσεις του περιοδικού καναλιού, L_x^+ και L_z^+.



Σχήμα 6: Σύγκριση των ταχυτήτων σε πλήρες DNS (NS950 στον Πιν. 1) με $\mathrm{Re}_\tau = 940$ (χρώμα μπλε) με το αντίστοιχο RNL (χρώμα κόκκινο) με $\mathrm{Re}_\tau = 970$ στο οποίο μόνο οι αρμονικές $k_x = 0$ και $hk_x = 12$ είναι μη-μηδενικές (RNL950k_x12 στον Πιν. 1). (α) Η μέση ροή (μέση τιμή ως προς τη x και z διεύθυνση καθώς και ως προς το χρόνο) σε εσωτερικές μονάδες. (β) Η μέση τετραγωνική ρίζα των διακυμάνσεων του πεδίου ταχυτήτων των διαταραχών, $\mathbf{u}'$.



Σχήμα 7: Η τυρβώδης κατάσταση στην προσομοίωση RNL950k_x12. (α) Στιγμιότυπο της μέσης ροής U ($k_x = 0$) στο επίπεδο y-z. (β) Οι διακυμάνσεις της ταχύτητας κατά της διεύθυνση x της αρμονικής $hk_x = 12$, $\left(\overline{u'^2}\right)^{1/2}$. (c) Η συνιστώσα της στροβιλότητα κατά τη διεύθυνση x που αντιστοιχεί στην στιγμιαία μέση ροή, $k_x = 0$ (μέση τιμή της στροβιλότητας ως προς τη x διεύθυνση, $\overline{\omega_x} = \partial_y W - \partial_z V$).

θυνση της ροής δημιουργώντας απείρου μήκους συνεκτικές δομές. Οι δομές αυτές κοντά στα τοιχώματα αποτελούνται από κυλινδρικούς στρόβιλους (rolls) με άξονες στη διεύθυνση της ροής με αντίστοιχες προσαυξήσεις στη μέση ταχύτητα στην ίδια διεύθυνση (streaks). Ο ασταθής αυτός μηχανισμός αποτελεί τη βάση του αναγεννητικού κύκλου κοντά στα τοιχώματα που συντηρεί την τυρβώδη ροή (self-sustaining process – SSP). Επειδή η στατιστική αυτή αστάθεια βασίζεται στην αλληλεπίδραση των πεδίων με μηδενικό κυματαριθμό, $k_x = 0$, στη διεύθυνση της ροής x και διαταραχών με μη μηδενικό κυματαριθμό k_x, η αστάθεια αυτή εκδηλώνεται από την αλληλεπίδραση μόνο των πρώτων δύο στατιστικών ροπών της στατιστικής δυναμικής. Η στατιστική δυναμική των πρώτων δύο στατιστικών ροπών αντιστοιχεί στη στατιστική δυναμική που παράγεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes στις οποίες οι διαταραχές εξελίσσονται υπό την επίδραση μόνο του στιγμιαίου μέσου πεδίου ταχυτήτων. Η προσέγγιση αυτή των εξισώσεων Navier-Stokes παράγει το σύστημα RNL το οποίο, επειδή περιλαμβάνει τη θεμελιώδη ασταθή αλληλεπίδραση των συνεκτικών δομών, συντηρεί ρεαλιστική τύρβη ακόμα και σε σχετικά μεγάλους αριθμούς Reynolds. Αποδεικνύεται ότι η δυναμική RNL αποκλιμακώνει την τυρβώδη κατάσταση διατηρώντας ένα διαταρακτικό πεδίο που αποτελείται μόνο από ένα μικρό αριθμό x αρμονικών. Η δυναμική RNL αποκαλύπτει με τον τρόπο αυτό τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας της τυρβώδους κατάστασης. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε προσομοίωση στην οποία ρεαλιστική τυρβώδης κατάσταση μπορεί να συντηρηθεί ακόμα με $\mathrm{Re}_\tau = 970$ με δυναμική RNL στην οποία οι διαταραχές έχουν μόνο ένα κυματαριθμό στην διεύθυνση της ροής. Η ύπαρξη αυτής της χρονοεξαρτώμενης σαγματικής ευστάθειας λύσης των RNL μπορεί να βοηθήσει στη κατανόηση της δομής του ελκυστή της τυρβώδους κατάστασης χωρίς τους περιορισμούς των απομονωμένων και περιορισμένων στον αριθμό ακριβών περιοδικών σαγματικής ευστάθειας λύσεων των εξισώσεων Navier-Stokes που έχουν βρεθεί πρόσφατα (βλ. Kawahara et al. (2012)).

Ευχαριστίες

Οι συγγραφείς ευχαριστούν τους J. Jiménez και A. Lozano-Durán για τη βοήθεια που τους παρείχαν κατά τη διάρκεια του First Multiflow Workshop 2012 υπό την αιγίδα του European Research Council. Ο Ν. Κωνσταντίνου επιπλέον ευχαριστεί το Κοινωφελές Ίδρυμα Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης για την οικονομική ενισχυση που του παρείχε.

Αναφορές

Adrian, R. J. (2007) Hairpin vortex organization in wall turbulence. *Phys. Fluids*, **19 (4)**, 041 301.

Benney, D. J. (1960) A non-linear theory for oscillations in a parallel flow. *J. Fluid Mech.*, **10 (02)**, 209–236.

Constantinou, N. C., A. Lozano-Durán, M.-A. Nikolaidis, B. F. Farrell, P. J. Ioannou, and J. Jiménez (2014) Turbulence in the highly restricted dynamics of a closure at second order: comparison with DNS. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **506**, 012 004.

del Álamo, J. C. and J. Jiménez (2006) Linear energy amplification in turbulent channels. *J. Fluid Mech.*, **559**, 205–213.

Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (1998) Perturbation structure and spectra in turbulent channel flow. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **11**, 215–227.

Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2003) Structural stability of turbulent jets. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 2101–2118.

Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2012) Dynamics of streamwise rolls and streaks in turbulent wall-bounded shear flow. *J. Fluid Mech.*, **708**, 149–196.

Frisch, U. (1995) *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.

Hamilton, K., J. Kim, and F. Waleffe (1995) Regeneration Mechanisms of Near-Wall Turbulence Structures. *J. Fluid Mech.*, **287**, 317–348.

Hopf, E. (1952) Statistical hydromechanics and functional calculus. *J. Ration. Mech. Anal.*, **1**, 87–123.

Hutchins, N. and I. Marusic (2007a) Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, **579**, 1–28.

Hutchins, N. and I. Marusic (2007b) Large-scale influences in near-wall turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **365 (1852)**, 647–664.

Kawahara, G., M. Uhlmann, and L. Van Veen (2012) The significance of simple invariant solutions in turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **44**, 203–225.

Kim, J., P. Moin, and R. Moser (1987) Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **177**, 133–166.

Kline, S. J., W. C. Reynolds, F. A. Schraub, and P. W. Runstadler (1967) The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, **30**, 741–773.

Marston, J. B., E. Conover, and T. Schneider (2008) Statistics of an unstable barotropic jet from a cumulant expansion. *J. Atmos. Sci.*, **65 (6)**, 1955–1966.

Marusic, I., B. J. McKeon, P. Monkewitz, H. M. Nagib, and K. R. Sreenivasan (2010) Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues. *Phys. Fluids*, **22**, 065 103.

Schoppa, W. and F. Hussain (2002) Coherent structure generation in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, **453**, 57–108.

Thomas, V., B. K. Lieu, M. R. Jovanović, B. F. Farrell, P. J. Ioannou, and D. F. Gayme (2014) Self-sustaining turbulence in a restricted nonlinear model of plane Couette flow. *Phys. Fluids*, **26**, 105 112.

Toh, S. and T. Itano (2005) Interaction between a large-scale structure and near-wall structures in channel flow. *J. Fluid Mech.*, **524**, 249–262.

Waleffe, F. (1997) On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids A*, **9**, 883–900.

Wu, X. and P. Moin (2009) Direct numerical simulation of turbulence in a nominally zero-pressure-gradient flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.*, **630**, 5–41.

SIMPLIFIED TURBULENCE IN WALL-BOUNDED FLOWS

Petros J. Ioannou*, **Marios-Andreas Nikolaidis and Navid C. Constantinou**

Department of Physics, National and Kapodistrian University of Athens, Athens

* e-mail: pjioannou@phys.uoa.gr

ABSTRACT

We present numerical simulations which show that a realistic and self-sustaining turbulent state at $Re_\tau = 970$ can be maintained with a single nonzero Fourier streamwise component without any other modification of the Navier-Stokes equations. The turbulent state is operating with the characteristic self-sustaining process (SSP) that operates in the inner wall region. This simplified turbulent state can lead to understanding of the dynamics of the SSP and also serve as the platform for designing control strategies of the turbulent state that go beyond the already existing linear strategies.

Keywords: fully turbulent flow, coherent structures, rolls, streaks, statistical dynamics, control of the turbulent state

ΠΑΥΣΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΙΞΩΔΟΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΗ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

Αλέξανδρος Συράκος[1,2], Γεώργιος Γεωργίου[1], Ανδρέας Αλεξάνδρου[3]
[1]Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τ.Θ. 20537, Λευκωσία 1678, Κύπρος
[2]Ωκεανογραφικό Κέντρο, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τ.Θ. 20537, Λευκωσία 1678, Κύπρος
[3]Τμήμα Μηχανικών Μηχανολογίας και Κατασκευαστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τ.Θ. 20537, Λευκωσία 1678, Κύπρος
E-mails: syrakos.alexandros@ucy.ac.cy, georgios@ucy.ac.cy, andalexa@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Η σταθερή ροή μέσα σε μια κλειστή τετράγωνη κοιλότητα που οφείλεται σε εφαπτομενική κίνηση του ενός τοιχώματος είναι ένα πολύ δημοφιλές πρόβλημα της υπολογιστικής ρευστομηχανικής (lid-driven cavity). Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η χρονική εξέλιξη της ροής αν το αίτιο της κίνησης (δηλ. η κίνηση του τοιχώματος) παύσει. Εξετάζονται δύο τύποι ρευστών: α) Νευτώνεια ρευστά, και β) ιξωδοπλαστικά ρευστά τύπου Bingham. Η συμπεριφορά των δύο τύπων ρευστών είναι ριζικά διαφορετική: Η Νευτώνεια ροή εξασθενεί συνεχώς χωρίς ποτέ να παύσει τελείως, ενώ η ιξωδοπλαστική ροή παύει σε πεπερασμένο χρόνο, όταν όλη η μάζα του ρευστού έχει «στερεοποιηθεί». Τα προβλήματα επιλύονται υπολογιστικά με την μέθοδο Πεπερασμένων Όγκων, ενώ η ιξωδοπλαστική συμπεριφορά προσεγγίζεται κατά Παπαναστασίου. Μελετάται η επίδραση των αριθμών Reynolds ($1 \leq Re \leq 1000$) και Bingham ($0 \leq Bn \leq 10$).

Λέξεις Κλειδιά: Χρονομεταβαλλόμενη ροή σε κλειστή κοιλότητα, ιξωδοπλαστική ροή, χρόνος παύσης, προσέγγιση Παπαναστασίου, μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ
Όταν το αίτιο που προκαλεί μια Νευτώνεια ροή (π.χ. ένα κινούμενο τοίχωμα ή μια κλίση πίεσης) παύσει, τότε το Νευτώνειο ρευστό επιβραδύνεται σταδιακά υπό την επίδραση των δυνάμεων ιξώδους, πλησιάζοντας την ακινησία η οποία επιτυγχάνεται θεωρητικά σε άπειρο χρόνο. Αντιθέτως, αν το ρευστό είναι ιξωδοπλαστικό (αν δηλαδή χαρακτηρίζεται από μια τάση διαρροής) τότε θα ακινητοποιηθεί σε πεπερασμένο χρόνο. Αυτό το αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί θεωρητικά για μονοδιάστατες ροές όπως επίπεδες και κυκλικές ροές Couette και επίπεδες και αξονοσυμμετρικές ροές Poiseuille (Glowinski, 1984 και Huilgol et al., 2002). Στην παρούσα εργασία εξετάζεται μια καθαρά διδιάστατη ροή, αυτή μέσα σε μια τετράγωνη κλειστή κοιλότητα, και παρατηρείται ότι οι δύο τύποι ρευστών συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΕΠΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
Εξετάζεται η ροή σε μια τετράγωνη κοιλότητα που τα τοιχώματά της έχουν μήκος L. Αρχικά το άνω τοίχωμα της κοιλότητας κινείται προς τα δεξιά με μια ταχύτητα U, παρασύροντας το ρευστό σε μια περιστροφική κίνηση. Θεωρείται ότι το πεδίο ροής βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση, όταν, τη χρονική στιγμή t=0, η κίνηση του άνω τοιχώματος διακόπτεται και το ρευστό αφήνεται να ηρεμήσει σταδιακά υπό την επίδραση του ιξώδους.

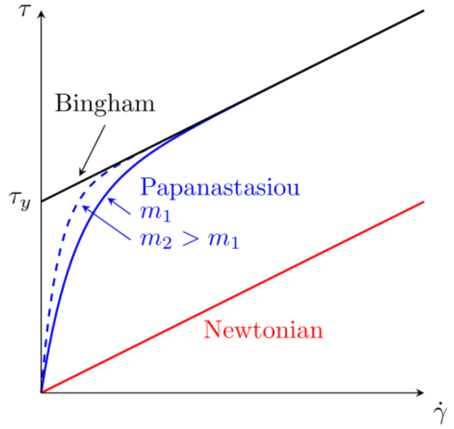
Το ρευστό που περικλείεται στην κοιλότητα είναι είτε Νευτώνειο, είτε ιξωδοπλαστικό τύπου Bingham. Τα ιξωδοπλαστικά υλικά ρέουν μόνο όταν το μέτρο των ασκούμενων τάσεων ξεπεράσει ένα όριο τ_y το οποίο ονομάζεται τάση διαρροής, ενώ σε διαφορετική περίπτωση συμπεριφέρονται ως στερεά. Ιξωδοπλαστικά είναι αρκετά υλικά βιομηχανικού, γεωφυσικού και βιολογικού ενδιαφέροντος (Barnes, 1999). Το απλούστερο ιξωδοπλαστικό μοντέλο, το οποίο χρησιμοποιείται και στην παρούσα εργασία, είναι το μοντέλο Bingham το οποίο προβλέπει ότι όταν ξεπεραστεί η τάση διαρροής και το υλικό ρέει, ο ρυθμός παραμόρφωσης αυξάνεται αναλογικά με την αύξηση της τάσης:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\gamma}} = 0 & \tau \le \tau_y \\ \boldsymbol{\tau} = \left(\dfrac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + \mu \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} & \tau > \tau_y \end{cases} \tag{1}$$

όπου $\boldsymbol{\tau}$ είναι ο τανυστής των τάσεων και $\tau = (\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\tau}/2)^{½}$ το μέτρο του, ενώ $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}$ είναι ο τανυστής ρυθμών παραμόρφωσης, όπου $\boldsymbol{u}=(u,v)$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας, και $\dot{\gamma} = (\dot{\boldsymbol{\gamma}}:\dot{\boldsymbol{\gamma}}/2)^{½}$ το μέτρο του. Η σταθερά μ ονομάζεται πλαστικό ιξώδες. Η καταστατική εξίσωση (1) έχει δύο κλάδους. Από αυτή τη διττή συμπεριφορά των ιξωδοπλαστικών υλικών ανακύπτουν σημαντικές δυσκολίες στην αριθμητική προσομοίωση ιξωδοπλαστικών ροών, καθώς δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων σε ποιες περιοχές του υπολογιστικού χώρου πρέπει να εφαρμοστεί ο κάθε κλάδος της καταστατικής εξίσωσης. Ο δημοφιλέστερος τρόπος αντιμετώπισης αυτής της δυσκολίας είναι η αντικατάσταση της καταστατικής εξίσωσης (1) από μια ομαλοποιημένη εξίσωση που έχει μόνο έναν κλάδο και προσομοιώνει την στερεή κατάσταση του υλικού προσδίδοντας τοπικά στο ρευστό ένα πάρα πολύ υψηλό ιξώδες. Η δημοφιλέστερη τέτοια προσέγγιση είναι αυτή η οποία προτάθηκε από τον Παπαναστασίου (1987), και η οποία υιοθετήθηκε και στην παρούσα εργασία:

$$\boldsymbol{\tau} = \left[\frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \left(1 - e^{-m\dot{\gamma}} \right) + \mu \right] \dot{\boldsymbol{\gamma}} \tag{2}$$

Η προσέγγιση εξαρτάται από την παράμετρο m, η οποία πρέπει να είναι επαρκώς μεγάλη: Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της τόσο καλύτερα προσεγγίζει η σχέση (2) την καταστατική εξίσωση Bingham (Σχήμα 1), αν και πάντοτε η τάση τείνει στο μηδέν όταν ο ρυθμός παραμόρφωσης τείνει στο μηδέν – δηλαδή όλο το υλικό είναι ρευστό. Σύμφωνα με την προηγούμενη εμπειρία μας (Chatzimina et al. (2005), Syrakos et al. (2014)) χρησιμοποιήθηκε η τιμή m = 400, η οποία συνεπάγεται ικανοποιητική ακρίβεια αλλά δεν είναι πολύ μεγάλη ώστε να προκαλεί προβλήματα στην αριθμητική επίλυση.



Σχήμα 1: Γραφικές παραστάσεις των καταστατικών εξισώσεων Bingham, Παπαναστασίου, και Νευτώνειου ρευστού. Τα τρία μοντέλα ταυτίζονται για τ_y = 0.

Η πυκνότητα ρ του ρευστού θεωρείται σταθερή. Συμβολίζοντας την πίεση με p, οι διέπουσες εξισώσεις, συνέχειας και ορμής, γράφονται αντίστοιχα:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} \tag{4}$$

Η διερεύνηση του προβλήματος γίνεται ευκολότερη αν οι παραπάνω εξισώσεις αδιαστατοποιηθούν. Για το σκοπό αυτό τα μήκη αδιαστατοποιούνται διά το μήκος της πλευράς της κοιλότητας, L, οι ταχύτητες διά την αρχική ταχύτητα του άνω τοιχώματος, U, η πίεση και οι τάσεις διά μια χαρακτηριστική τάση $\tau_y+\mu U/L$. Απομένει η αδιαστατοποίηση του χρόνου. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζεται μια κλίμακα χρόνου η οποία είναι χαρακτηριστική για το υπό μελέτη φαινόμενο, την παύση της ροής λόγω της επίδρασης των δυνάμεων ιξώδους: Η ποσότητα ρUL^3 είναι ανάλογη της ορμής που περιέχει το σύστημα αρχικά. Διαιρώντας την με τη χαρακτηριστική δύναμη ιξώδους $(\tau_y+\mu U/L)L^2$, παίρνουμε το χρόνο $T = \rho UL^2/(\tau_y L+\mu U)$ ο οποίος είναι ο χρόνος που θα χρειαζόταν η χαρακτηριστική ιξώδης δύναμη για να μηδενίσει την χαρακτηριστική ορμή. Αδιαστατοποιώντας λοιπόν και το χρόνο διά T, και αντικαθιστώντας τον τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\tau}$ από την καταστατική εξίσωση (2), καταλήγουμε στην παρακάτω αδιάστατη μορφή της εξίσωσης ορμής, όπου για ευκολία οι αδιάστατες μεταβλητές συμβολίζονται με τα ίδια σύμβολα όπως και οι διαστατές.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + Re^{*}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = -\nabla p + \nabla\cdot\left[\left(\frac{Bn^{*}}{\dot{\gamma}} + \left(1-Bn^{*}\right)\right)\dot{\boldsymbol{\gamma}}\right] \tag{5}$$

Η αδιάστατη εξίσωση συνέχειας είναι ακριβώς η ίδια με την (3). Η εξίσωση ορμής (5) είναι γραμμένη σε τέτοια μορφή ώστε να περιέχει τους αδιάστατους αριθμούς Re^* (ενεργό αριθμό Reynolds) και Bn^* (τροποποιημένο αριθμό Bingham) αντί για τους αριθμούς που συνήθως χρησιμοποιούνται σε ιξωδοπλαστικές ροές, δηλαδή τον αριθμό Reynolds, $Re=\rho UL/\mu$, και τον αριθμό Bingham, $Bn=\tau_y L/\mu U$. Οι καινούριοι αδιάστατοι αριθμοί, ο οποίοι φαίνεται να προτάθηκαν αρχικά από τους Nirmalkar et al. (2013), ορίζονται ως εξής:

$$Re^{*} \equiv \frac{\rho U^2}{\tau_y + \mu U/L} = \frac{Re}{Bn+1} \tag{6}$$

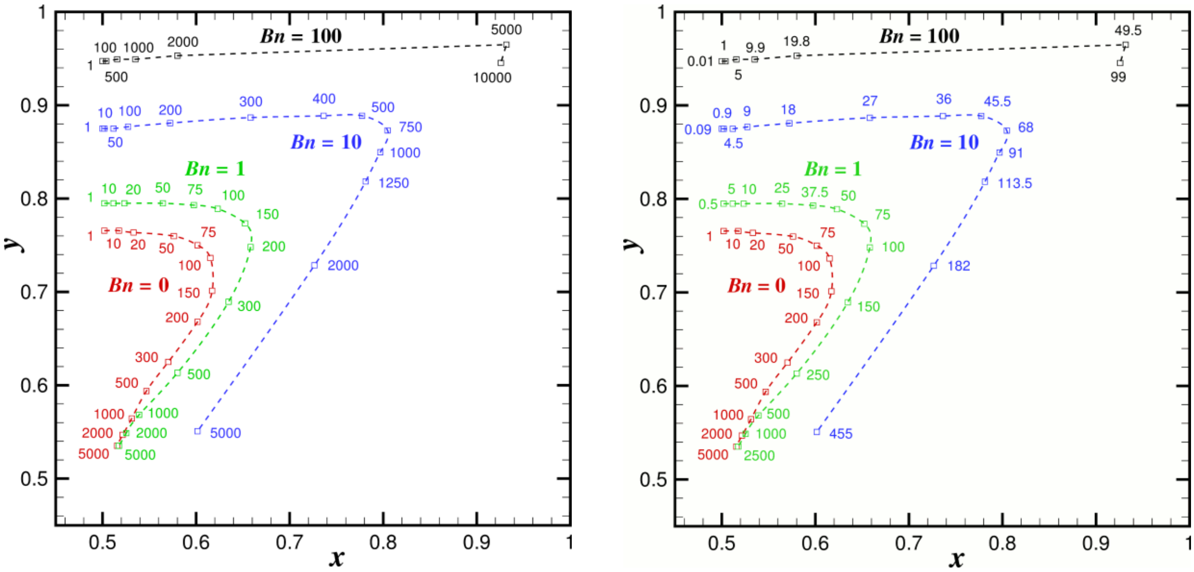
$$Bn^{*} \equiv \frac{\tau_y}{\tau_y + \mu U/L} = \frac{Bn}{Bn+1} \tag{7}$$

Ο αριθμός Re^* είναι ένα μέτρο του πηλίκου των αδρανειακών δυνάμεων (που είναι ανάλογες με την χαρακτηριστική ροή αδράνειας ρU^2), διά τις ιξώδεις δυνάμεις (που είναι ανάλογες με την χαρακτηριστική ιξώδη τάση $\tau_y+\mu U/L$) σε μια ιξωδοπλαστική ροή. Τον ίδιο ρόλο παίζει στις Νευτωνικές ροές ο αριθμός $Re \equiv \rho U^2/(\mu U/L)$. Μάλιστα οι δύο αριθμοί ταυτίζονται όταν $\tau_y=0$ (Νευτωνική ροή). Ο αριθμός Re^* χαρακτηρίζει την ροή καλύτερα από τον συνήθη Re. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2 απεικονίζεται η θέση του κέντρου της κύριας δίνης που δημιουργείται μέσα στην κοιλότητα, για σταθερή ροή (κάποιες από αυτές τις ροές χρησιμοποιούνται ως αρχικές συνθήκες για τις παρούσες προσομοιώσεις). Αν τα αποτελέσματα απεικονιστούν ως συνάρτηση του αριθμού Re, τότε αυτός ο αριθμός από μόνος του δεν φανερώνει κάποια πληροφορία για την ροή, αλλά χρειάζεται ταυτόχρονη γνώση και του αριθμού Bn. Αντιθέτως, ο αριθμός Re^* από μόνος του φανερώνει σημαντικές πληροφορίες για την ροή: Μέχρι $Re^*\approx 1$ η δίνη βρίσκεται κοντά στον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Αν ο Re^* αυξηθεί, η δίνη κινείται προς το κατάντη τοίχωμα, μέχρι $Re^*\approx 60$-75. Αν ο Re^* αυξηθεί περαιτέρω τότε η δίνη μετακινείται προς το κέντρο της κοιλότητας.

Ο αριθμός Bn^* αντιθέτως δεν προσφέρει καμία επιπλέον πληροφορία από το συνήθη Bn, απλοποιεί όμως κάπως την εξίσωση (5). Η διαφορά είναι ότι ο Bn^* παίρνει τιμές από 0 (Νευτωνικό ρευστό) έως

1 (στερεό υλικό) ενώ ο *Bn* αντίστοιχα από 0 έως ∞. Στο υπόλοιπο αυτής της εργασίας θα προτιμάται η χρήση του *Bn*.

Στην παρούσα εργασία οι προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν με $U = L = \rho = 1$ ενώ οι τιμές των μ και τ_y προσαρμόζονταν ανάλογα με τους επιθυμητούς αριθμούς *Re* και *Bn*. Οι συνδυασμοί (*Re*, *Bn*) που δοκιμάστηκαν, μαζί με τους αντίστοιχους αριθμούς Re^*, αναγράφονται στον Πίνακα 1.



Σχήμα 2: Η θέση του κέντρου της δίνης ως συνάρτηση του αριθμού *Bn* (με διαφορετικά χρώματα) και του αριθμού *Re* (αριστερά) ή Re^* (δεξιά), οι οποίοι αναγράφονται δίπλα σε κάθε σημείο. Τα δεδομένα προέρχονται από τους Syrakos et al. (2014).

Πίνακας 1: Οι αριθμοί Re^* που αντιστοιχούν σε καθένα από τους συνδυασμούς (*Re*, *Bn*) που δοκιμάστηκαν στην παρούσα εργασία.

Re	***Bn*=0**	***Bn*=1**	***Bn*=2**	***Bn*=5**	***Bn*=10**
1	1	0.5	0.33	0.17	0.09
10	10	5	3.3	1.7	0.9
100	100	50	33	17	9
1000	1000	500	333	167	91

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Ο υπολογιστικός χώρος, ένα τετράγωνο πλευράς *L*, διακριτοποιήθηκε με ένα πλέγμα διαστάσεων 513×513. Οι εξισώσεις (3) και (4) σε συνδυασμό με την (2) επιλύθηκαν αριθμητικά με την μέθοδο πεπερασμένων όγκων που περιγράφεται από τους Syrakos et al. (2013). Η χωρική ακρίβεια της μεθόδου είναι 2^{ης} τάξης καθώς χρησιμοποιεί κεντρικές διαφορές και για τους όρους συναγωγής και για τους όρους ιξώδους. Η μέθοδος εκείνη, που είναι για σταθερές ροές, τροποποιήθηκε για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας προσθέτοντας και την χρονική παράγωγο στην εξίσωση ορμής, η οποία διακριτοποιήθηκε με το σχήμα τριών επιπέδων ακρίβειας 2^{ης} τάξης που περιγράφεται από τους Ferziger και Peric (2002):

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|_{t=t_i} = \frac{3\boldsymbol{u}(t_i) - 4\boldsymbol{u}(t_{i-1}) + \boldsymbol{u}(t_{i-2})}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \qquad (8)$$

όπου Δt είναι το χρονικό βήμα και $t_i = i{\cdot}\Delta t$ είναι ο χρόνος μετά από *i* βήματα. Η μέθοδος είναι πεπλεγμένη και δεν έχει περιορισμό στο χρονικό βήμα, απαιτεί όμως την αποθήκευση των λύσεων των δύο προηγούμενων χρονικών βημάτων t_{i-1} και t_{i-2}. Για τον υπολογισμό του πρώτου βήματος t_1

χρησιμοποιείται η πεπλεγμένη μέθοδος Euler. Το χρονικό βήμα επιλέχθηκε να έχει μέγεθος $10^{-6}T$ για τα πρώτα 400 χρονικά βήματα, όπου η ροή μεταβάλλεται γρήγορα, $4\times10^{-6}T$ για τα επόμενα 400 βήματα, και $1.6\times10^{-5}T$ για τα υπόλοιπα βήματα της προσομοίωσης, όπου $T = \rho UL^2/(\tau_y L+\mu U)$ είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος εξασθένισης του κάθε προβλήματος, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 2. Το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει σε κάθε χρονικό βήμα επιλύεται με την μέθοδο SIMPLE με επιτάχυνση πολλαπλών πλεγμάτων.

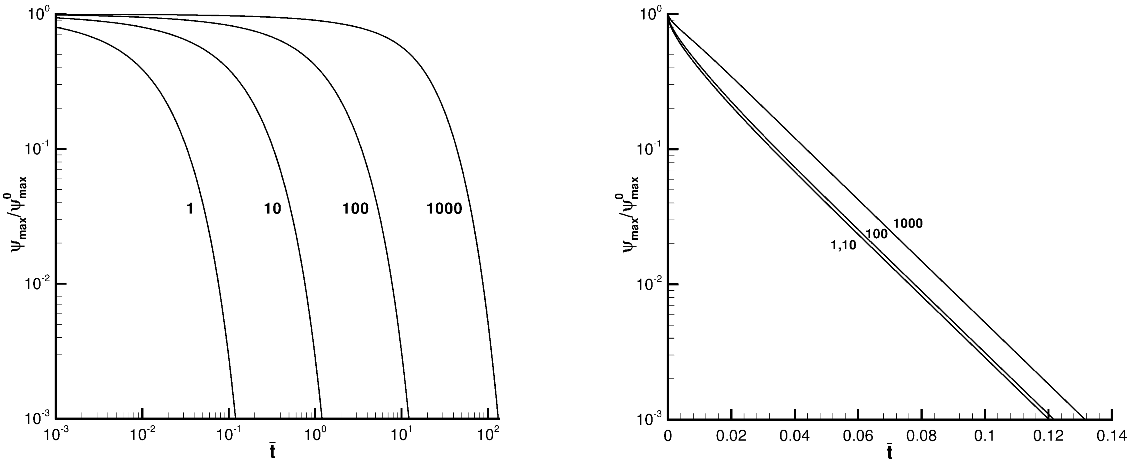
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΡΟΗ

Η εξασθένιση της ροής με τον χρόνο μπορεί να καταγραφεί χρησιμοποιώντας ως δείκτη την ισχύ της κύριας δίνης, που ισούται με την μέγιστη τιμή της ροϊκής συνάρτησης ψ, όπου $\partial\psi/\partial x = v$, $\partial\psi/\partial y = -u$ και ψ=0 στα τοιχώματα. Η ισχύς ψ_{max} ισούται με το ρυθμό ροής ρευστού δια μέσου οποιασδήποτε γραμμής ενώνει το κέντρο της δίνης με τα τοιχώματα. Ο ρυθμός εξασθένισης της ισχύος της δίνης απεικονίζεται στο Σχήμα 3. Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός *Re* τόσο η εξασθένιση είναι πιο αργή διότι οι δυνάμεις ιξώδους είναι συγκριτικά ασθενέστερες. Η γραφική παράσταση της ισχύος ως συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου *t*/*T* (Σχήμα 3 δεξιά) είναι πιο διαφωτιστική από αυτήν ως προς τον διαστατό χρόνο *t*, και φανερώνει ότι ο ρυθμός εξασθένισης ως προς *t*/*T* είναι ανεξάρτητος του αριθμού *Re*. Μάλιστα, καθώς ο άξονας της ισχύος έχει λογαριθμική κλίμακα και οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθύγραμμες, μετρώντας κανείς την κλίση των ευθειών αυτών καταλήγει ότι:

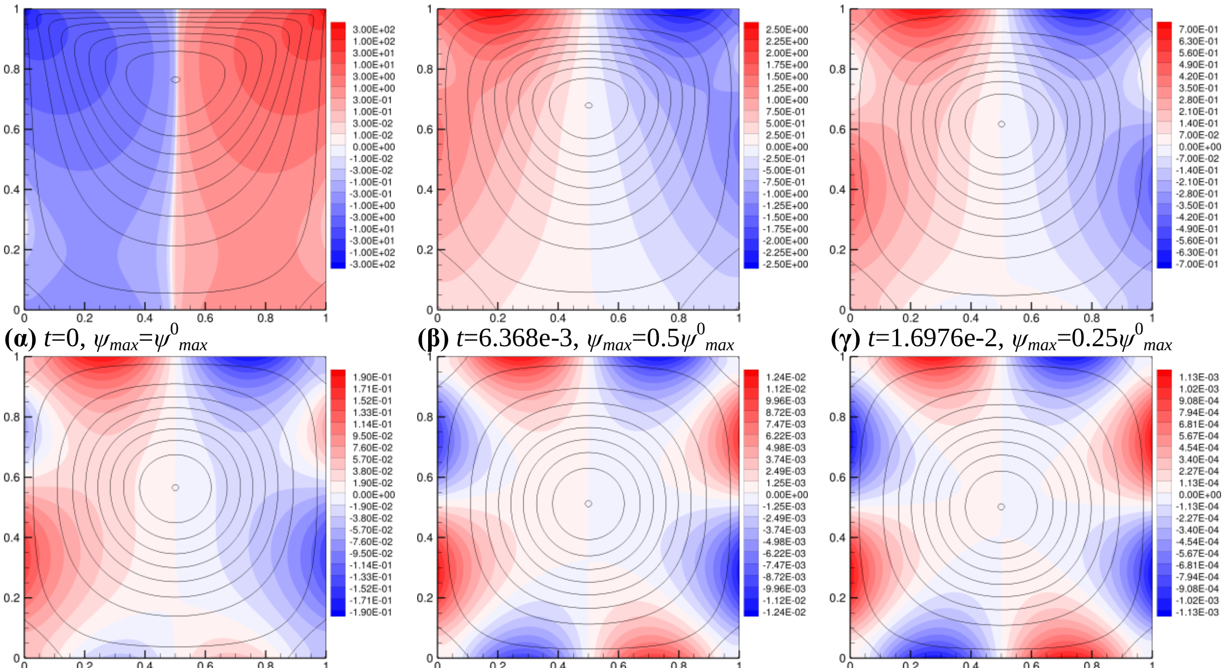
$$\frac{\psi_{\max}(t_2)}{\psi_{\max}(t_1)} = e^{-52.35\left(\frac{t_2}{T}-\frac{t_1}{T}\right)} = e^{-52.35\frac{\mu(t_2-t_1)}{\rho L^2}} \tag{9}$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να συγκριθεί με αντίστοιχες μονοδιάστατες ροές που έχουν αναλυτική λύση (βλ. π.χ. Papanastasiou et al. (1999)), όπως η παύση επίπεδης ροής Couette όπου οι δύο πλάκες απέχουν απόσταση *L*/2, και η παύση κυκλικής ροής Couette όπου υπάρχει μόνο ο εξωτερικός κύλινδρος ο οποίος έχει ακτίνα επίσης *L*/2. Αυτές οι ροές έχουν αρχικές συνθήκες όπου η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται από 0 έως *U* σε μια απόσταση *L*/2, κάτι που περίπου ισχύει και στην υπό εξέταση ροή σε κλειστή κοιλότητα, αν υποτεθεί ότι αρχικά το κέντρο της δίνης βρίσκεται κοντά στο κέντρο της κοιλότητας. Και αυτές οι ροές εξασθενούν επίσης σύμφωνα με την σχέση (9), μόνο που αντί για –52.35 οι αντίστοιχες σταθερές είναι –39.48 και –58.73.

Στο Σχήμα 4 απεικονίζεται η εξέλιξη του πεδίου ροής για *Re*=1. Το κέντρο της δίνης μετακινείται σταδιακά προς το κέντρο της κοιλότητας και η πίεση αποκτά ένα χαρακτηριστικό μοτίβο εναλλασσόμενων υψηλών / χαμηλών πιέσεων. Μετά από κάποιο χρόνο, το πεδίο ροής αποκτά μια μορφή η οποία πλέον μένει αναλλοίωτη στο χρόνο, αν και συνεχώς εξασθενεί – το μοτίβο των γραμμών ροής και της πίεσης αποκτά μια μόνιμη μορφή (Σχήματα 4(ε) και 4(στ)).



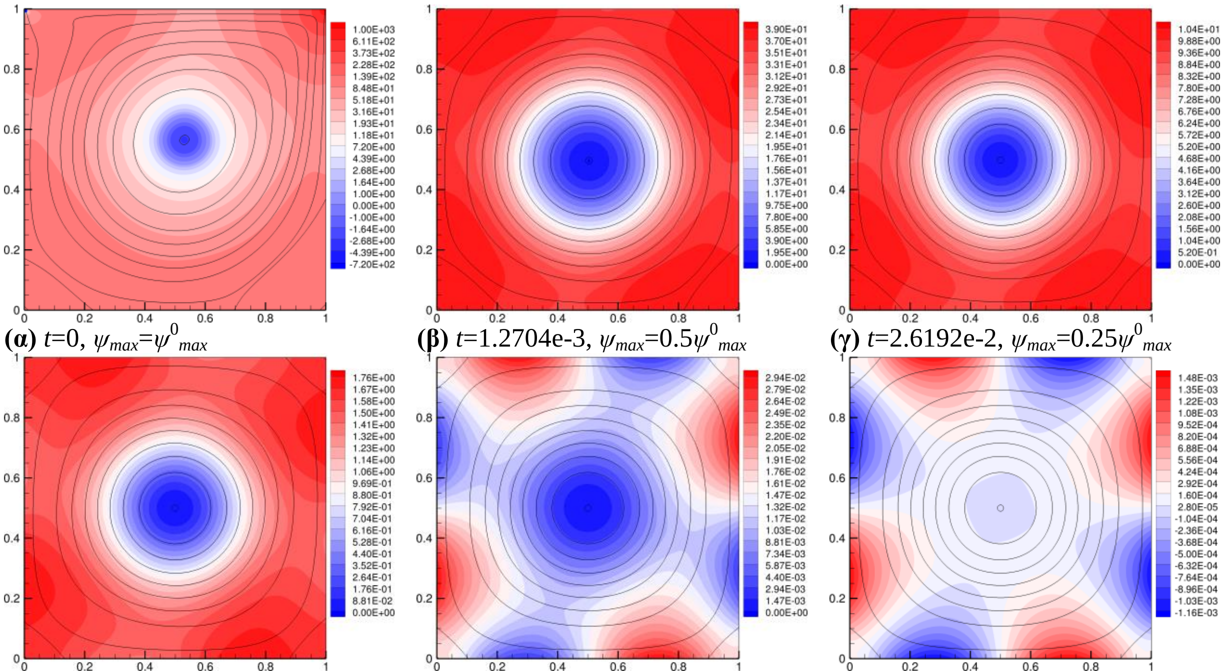
Σχήμα 3: Η ισχύς της δίνης, δια την αρχική ισχύ, ως συνάρτηση του διαστατού (αριστερά) και αδιάστατου (δεξιά) χρόνου. Δίπλα σε κάθε καμπύλη αναγράφεται ο αριθμός Reynolds.



(α) t=0, $\psi_{max}=\psi^0_{max}$ **(β)** t=6.368e-3, $\psi_{max}=0.5\psi^0_{max}$ **(γ)** t=1.6976e-2, $\psi_{max}=0.25\psi^0_{max}$

(δ) t=3.2928e-2, $\psi_{max}=0.1\psi^0_{max}$ **(ε)** t=7.6208e-2, $\psi_{max}=0.01\psi^0_{max}$ **(στ)** t=1.2016e-2, $\psi_{max}=0.001\psi^0_{max}$

Σχήμα 4: Εξέλιξη του πεδίου ροής για Re=1. Οι μαύρες γραμμές είναι γραμμές ροής, ενώ η χρωματική κλίμακα δηλώνει την αδιάστατη πίεση. Οι χρόνοι που αναγράφονται είναι αδιάστατοι.



(α) t=0, $\psi_{max}=\psi^0_{max}$ **(β)** t=1.2704e-3, $\psi_{max}=0.5\psi^0_{max}$ **(γ)** t=2.6192e-2, $\psi_{max}=0.25\psi^0_{max}$

(δ) t=4.3648e-2, $\psi_{max}=0.1\psi^0_{max}$ **(ε)** t=8.7552e-2, $\psi_{max}=0.01\psi^0_{max}$ **(στ)** t=1.31536e-2, $\psi_{max}=0.001\psi^0_{max}$

Σχήμα 5: Εξέλιξη του πεδίου ροής για Re=1000. Οι μαύρες γραμμές είναι γραμμές ροής, ενώ η χρωματική κλίμακα δηλώνει την αδιάστατη πίεση. Οι χρόνοι που αναγράφονται είναι αδιάστατοι.

Αντίστοιχα, στο Σχήμα 5 απεικονίζεται η εξέλιξη του πεδίου ροής για Re=1000. Σε αυτή την περίπτωση, λόγω των ασθενών δυνάμεων ιξώδους αρχικά στην ισορροπία δυνάμεων κυριαρχούν οι δυνάμεις αδράνειας και πίεσης. Η πίεση δρα ως κεντρομόλος δύναμη που αναγκάζει την περιστροφική κίνηση του ρευστού μέσα στην κοιλότητα, οπότε η κατανομή πίεσης είναι αυξητική από το κέντρο της κοιλότητας προς τα τοιχώματα. Σταδιακά όμως, όσο η ροή εξασθενεί, οι δυνάμεις αδράνειας και πίεσης ελαττώνονται και οι δυνάμεις ιξώδους γίνονται πιο σημαντικές. Τελικά (Σχ.

5(στ)) παίρνουμε το ίδιο ακριβώς μοτίβο στο οποίο κατέληξε και το πεδίο ροής Re=1 (Σχ. 4(στ)). Πιο συγκεκριμένα, επειδή οι γραμμές ροής δεν αλλάζουν πλέον μετά από κάποιο χρόνο στα Σχήματα 4 και 5, αυτό σημαίνει ότι η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας σε κάθε σημείο δεν μεταβάλλεται, παρά μόνο το μέτρο της ταχύτητας εξασθενεί. Αυτό, σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα (9), συνεπάγεται ότι $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_0 e^{-c(t-t0)}$, όπου $\boldsymbol{u}_0$ είναι το πεδίο ταχύτητας κατά την χρονική στιγμή t_0 και c=52.35 (όλα τα σύμβολα συμβολίζουν τις αδιάστατες ποσότητες). Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην εξίσωση ορμής (5) (με Bn^*=0 διότι η ροή είναι Νευτώνεια) τότε παίρνουμε:

$$-\nabla p \;=\; \left(-c\boldsymbol{u}_0 \;+\; e^{-ct} Re\, \boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u}_0 \;-\; \nabla \cdot \left[\nabla \boldsymbol{u}_0 + \left(\nabla \boldsymbol{u}_0\right)^{\mathrm{T}}\right]\right) e^{-ct} \tag{10}$$

Με την πάροδο του χρόνου, ο όρος $e^{-ct}\, Re\, \boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u}_0$ καθίσταται αμελητέος σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους μέσα στην παρένθεση, και η εξίσωση τείνει στην εξής μορφή:

$$-\nabla p \;=\; \left(-c\boldsymbol{u}_0 \;-\; \nabla \cdot \left[\nabla \boldsymbol{u}_0 + \left(\nabla \boldsymbol{u}_0\right)^{\mathrm{T}}\right]\right) e^{-ct} \tag{11}$$

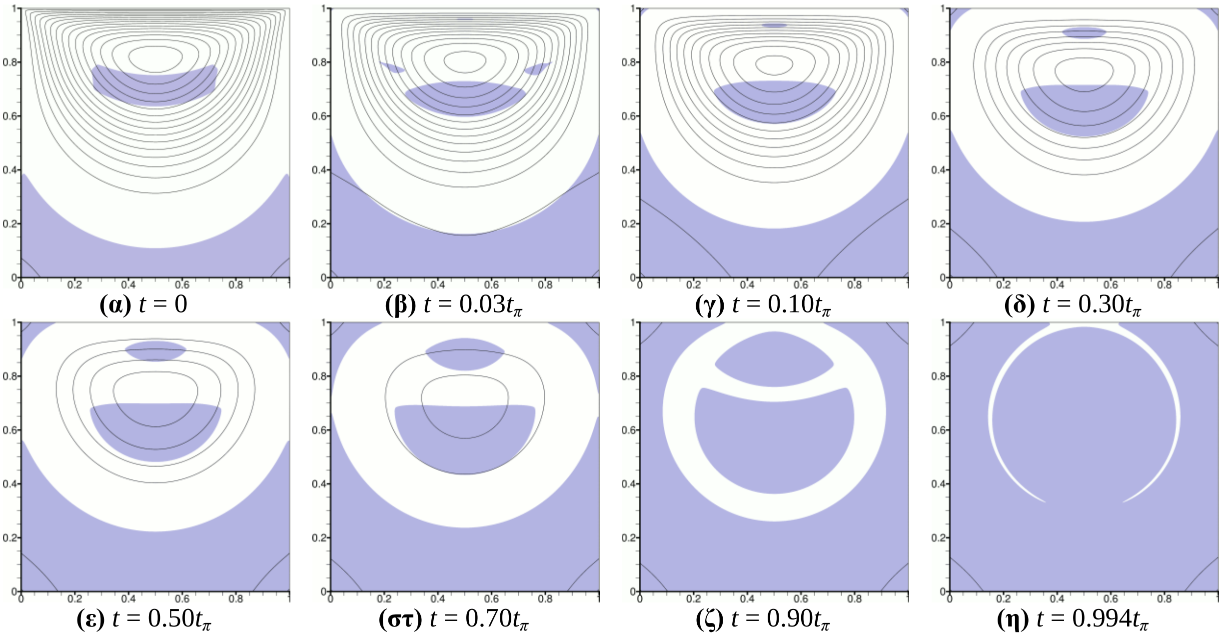
η οποία είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό Reynolds, και δείχνει ότι και οι δυνάμεις πίεσης εξασθενούν με τον ίδιο ρυθμό, $p(t) = p_0\, e^{-ct}$.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΡΟΗ BINGHAM

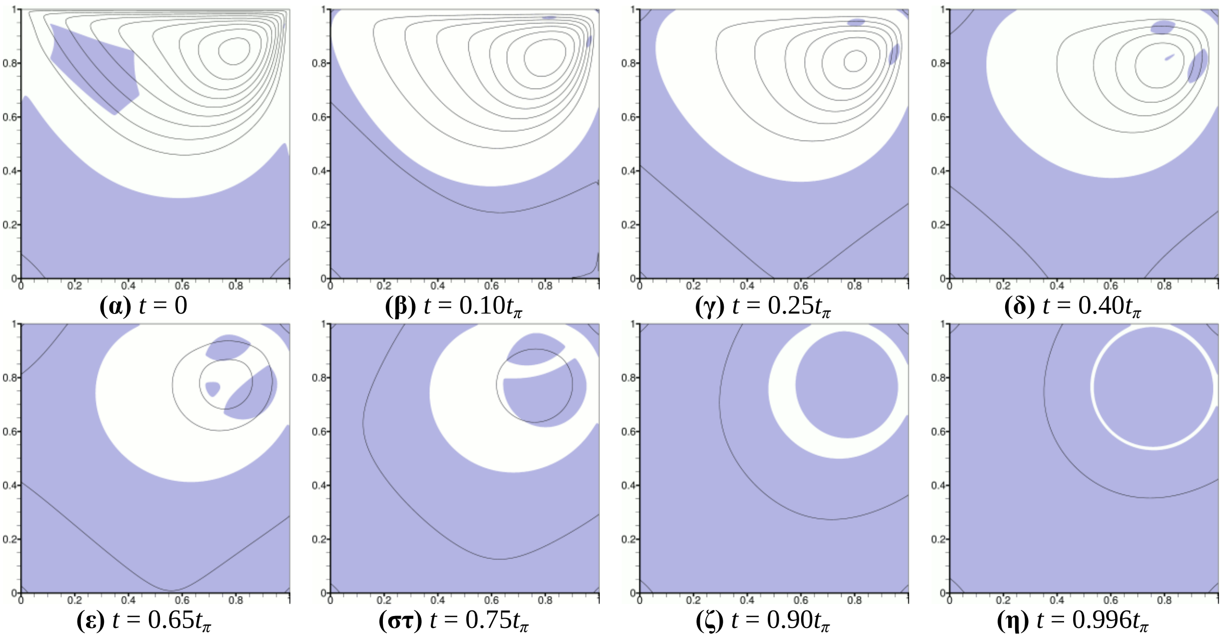
Η ιξωδοπλαστική ροή χαρακτηρίζεται από την πιθανή συνύπαρξη ρευστού και «στερεοποιημένου» υλικού. Μια ομαλοποιημένη καταστατική εξίσωση όπως η (2) θεωρεί όλο το υλικό ρευστό, και επομένως απαιτείται ένα ξεχωριστό κριτήριο αναγνώρισης των στερεοποιημένων περιοχών. Στην παρούσα εργασία υιοθετείται η συνήθης πρακτική να θεωρείται στερεοποιημένο το υλικό όταν $\tau < \tau_y$. Όπως αναφέρθηκε στην Εισαγωγή, μετά την παρέλευση κάποιου χρόνου, έστω t_π, όλο το υλικό έχει πλέον στερεοποιηθεί και η ροή παύει.

Το Σχήμα 6 δείχνει την εξέλιξη της ροής Bingham για Re=1 και Bn=2, όπου μπορεί κανείς να δει τα κύρια χαρακτηριστικά μιας τέτοιας ροής. Ήδη από το ξεκίνημα της ροής (t=0) υπάρχουν περιοχές ρευστού υλικού και περιοχές στερεοποιημένου υλικού. Οι τελευταίες διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: Α) Αυτές που εφάπτονται σε κάποιο τοίχωμα περιέχουν υλικό που είναι ακίνητο, λόγω της συνθήκης μη-ολίσθησης. Τέτοιες περιοχές αναπτύσσονται κυρίως στον πυθμένα της κοιλότητας όπου οι τάσεις είναι χαμηλές. Β) Αυτές που δεν εφάπτονται σε κάποιο τοίχωμα περιέχουν υλικό που παρασύρεται από την ροή και κινείται. Εντούτοις οι ίδιες οι περιοχές μπορεί να μένουν σχετικά ακίνητες στο χώρο, καθώς υλικό εισρέει σε αυτές και στερεοποιείται, ενώ ταυτόχρονα άλλο υλικό εξέρχεται από αυτές και ρευστοποιείται. Στο Σχήμα 6 παρατηρούνται κυρίως δύο τέτοιες περιοχές, μια μικρότερη πάνω από το κέντρο της δίνης και μια μεγαλύτερη κάτω από το κέντρο της δίνης. Το υλικό αυτών των περιοχών εκτελεί περιστροφή στερεού σώματος, αλλά η ακτίνα περιστροφής της άνω περιοχής είναι μεγαλύτερη, καθώς βρίσκεται κοντά στο τοίχωμα το οποίο αναγκάζει τις ροϊκές γραμμές να είναι σχετικά ευθύγραμμες. Η κάτω περιοχή δεν έχει τέτοιο περιορισμό και παρουσιάζει μικρότερη ακτίνα περιστροφής. Όσο περνάει ο χρόνος και η ροή εξασθενεί, οι τάσεις μειώνονται και οι στερεοποιημένες περιοχές αυξάνουν σε μέγεθος. Κάποια στιγμή οι δύο κινούμενες περιοχές ενώνονται – αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν οι ακτίνες περιστροφής τους έχουν γίνει ίσες, διότι το συσσωμάτωμά τους μπορεί να έχει μόνο μία ακτίνα περιστροφής. Σε σύντομο χρονικό διάστημα μετά την συσσωμάτωση των δύο κινούμενων περιοχών ακολουθεί συσσωμάτωση και με το ακίνητο ρευστοποιημένο υλικό που καλύπτει τα τοιχώματα, και η ροή παύει. Στο Σχήμα 6(η) φαίνεται ότι η συσσωμάτωση της κινούμενης με την ακίνητη περιοχή δεν συμβαίνει στιγμιαία αλλά σταδιακά. Αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό, αλλά οφείλεται στην χρήση της ομαλοποιημένης καταστατικής εξίσωσης (2). Η χρήση μεγαλύτερης τιμής για την παράμετρο m θα βελτίωνε τα αποτελέσματα. Στην πραγματικότητα, την στιγμή της παύσης η κινούμενη περιοχή, ολοένα επιβραδυνόμενη προηγουμένως, έχει πλέον ακινητοποιηθεί, και ο δακτύλιος ρευστού υλικού που την περιτριγυρίζει έχει εξαφανιστεί.

Η περίπτωση *Re*=1, *Bn*=2 του Σχ. 6 αντιστοιχεί σε Re^*=0.33 (Πίνακας 1), ο οποίος είναι αρκετά μικρός ώστε η ροή να είναι συμμετρική, και αρχικά η δίνη να βρίσκεται κοντά στο άνω τοίχωμα και στη μέση της κοιλότητας κατά την οριζόντια διεύθυνση (βλ. Σχ. 2 δεξιά). Στο Σχήμα 7 απεικονίζεται το πεδίο ροής για *Re*=1000, *Bn*=10, που αντιστοιχεί σε ένα μεγαλύτερο Re^*=91, οπότε αρχικά η δίνη βρίσκεται κοντά στο δεξί τοίχωμα. Έτσι, στο αριστερό τοίχωμα υπάρχουν χαμηλές τάσεις και το υλικό εκεί σύντομα στερεοποιείται, περιορίζοντας την δίνη σε μια σχετικά μικρή περιοχή. Γι' αυτό, το μέγεθος της κινούμενης στερεοποιημένης περιοχής είναι μικρό όταν η ροή πλησιάζει στην παύση. Κατά τα άλλα, τα παρατηρούμενα φαινόμενα είναι παρόμοια όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

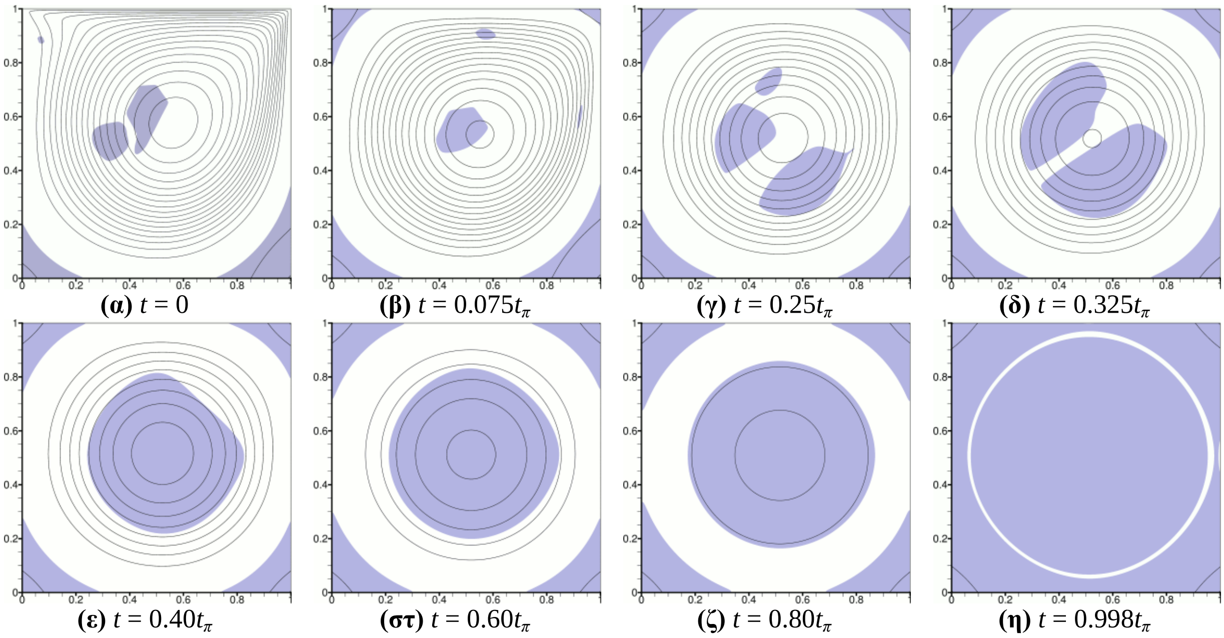


Σχήμα 6: Εξέλιξη της ροής για *Re*=1, *Bn*=2. Οι χρόνοι δίνονται ως ποσοστό του χρόνου πάυσης t_π. Οι στερεοποιημένες περιοχές εικονίζονται σκιασμένες. Διαδοχικές ροϊκές γραμμές διαφέρουν κατά δψ = 0.004, με ψ=0 στα τοιχώματα.

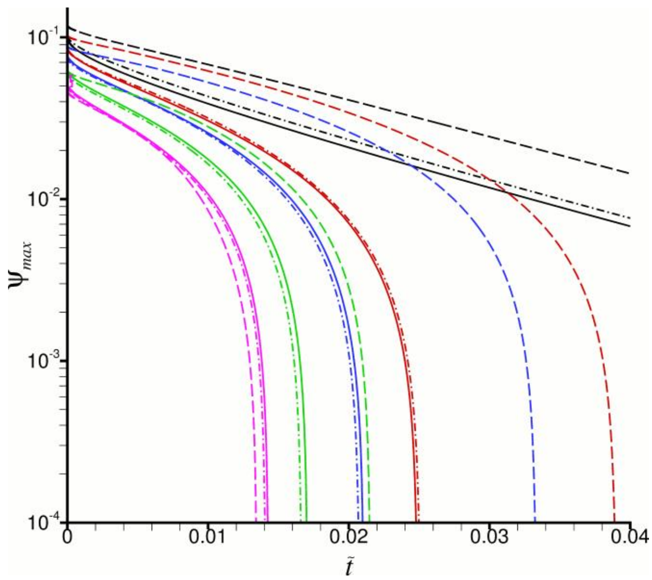


Σχήμα 7: Εξέλιξη της ροής για *Re*=1000, *Bn*=10. Οι χρόνοι δίνονται ως ποσοστό του χρόνου πάυσης t_π. Οι στερεοποιημένες περιοχές εικονίζονται σκιασμένες. Διαδοχικές ροϊκές γραμμές διαφέρουν κατά $\delta\psi$ = 0.004, με ψ=0 στα τοιχώματα.

Τέλος, στο Σχήμα 8 απεικονίζεται η εξέλιξη του πεδίου ροής για ένα υψηλό αριθμό *Re**=333 (*Re*=1000, *Bn*=2). Το χαρακτηριστικό αυτής της ροής είναι ότι εξ' αρχής η δίνη βρίσκεται κοντά στο κέντρο της κοιλότητας και δεν υφίσταται έντονους γεωμετρικούς περιορισμούς από τα τοιχώματα. Γι' αυτό οι ακτίνες περιστροφής των κινούμενων στερεών περιοχών μπορούν να μεταβάλλονται εύκολα, οπότε η συσσωμάτωση όλων αυτών των περιοχών σε μια ενιαία περιστρεφόμενη στερεή περιοχή γίνεται αρκετά νωρίς, σε αντίθεση με τις περιπτώσεις χαμηλότερων *Re**. Στο Σχήμα αυτό είναι πιο εύκολο να διακρίνει κανείς ότι εντός της κινούμενης στερεής περιοχής οι γραμμές ροής αποτελούν τέλειους ομόκεντρους κύκλους.



Σχήμα 8: Εξέλιξη της ροής για *Re*=1000, *Bn*=2. Οι χρόνοι δίνονται ως ποσοστό του χρόνου πάυσης t_π. Οι στερεοποιημένες περιοχές εικονίζονται σκιασμένες. Διαδοχικές ροϊκές γραμμές διαφέρουν κατά $\delta\psi = 0.004$, με ψ=0 στα τοιχώματα.



Σχήμα 9: Εξασθένιση της ισχύος της δίνης ως συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου για διάφορους αριθμούς Bingham: *Bn*=0 (μαύρο), *Bn*=1 (κόκκινο), *Bn*=2 (μπλε), *Bn*=5 (πράσινο) και *Bn*=10 (ροζ), καθώς και διάφορους αριθμούς Reynolds: *Re*=1 (συμπαγείς γραμμές), *Re*=100 (αλυσιδωτές γραμμές) και *Re*=1000 (διακεκομμένες γραμμές). Οι γραμμές για *Re*=10 συμπίπτουν με αυτές για *Re*=1.

Το Σχήμα 9 συγκεντρώνει τα αποτελέσματα που αφορούν στην ισχύ της δίνης για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Όπως φαίνεται, η χρήση του αδιάστατου χρόνου t/T προσφέρει και πάλι πλεονέκτημα, καθώς οι περισσότερες καμπύλες βρίσκονται συγκεντρωμένες – δεν ταυτίζονται όμως, διότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός Bingham τόσο μεγαλύτερο ποσοστό του υλικού είναι ήδη στερεοποιημένο εξ' αρχής, οπότε ο χρόνος παύσης είναι μικρότερος. Το διάγραμμα αυτό δικαιολογεί την χρήση αδιάστατου χρονικού βήματος Δt ανεξάρτητου από τους αριθμούς *Re* και *Bn* στις προσομοιώσεις.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα έρευνα μελέτησε την παύση Νευτώνειας και ιξωδοπλαστικής ροής σε κλειστή κοιλότητα όταν διακοπεί η κίνηση του τοιχώματος. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με τα θεωρητικά αποτελέσματα μονοδιάστατων ροών, ότι, σε αντίθεση με την Νευτώνεια ροή, η ιξωδοπλαστική ροή παύει σε πεπερασμένο χρόνο. Αυτό συμβαίνει καθώς οι ιξώδεις δυνάμεις επιβραδύνουν την ροή, ελαττώνουν τις τάσεις, και το υλικό σταδιακά στερεοποιείται. Οι κινούμενες στερεοποιημένες περιοχές επιβραδύνουν την κίνησή τους μέχρι που, κατά την στιγμή της παύσης, ακινητοποιούνται τελείως και ενώνονται με τις ακίνητες στερεές περιοχές. Η ροή εξαρτάται από δύο αδιάστατους αριθμούς, τους *Re* και *Bn*, αλλά ένας συνδυασμός τους, ο Re^*, μπορεί να δώσει περισσότερες πληροφορίες για την ροή απ' ότι είτε ο *Re* είτε ο *Bn* μόνος του. Τέλος, προτάθηκε και η χρονική κλίμακα εξασθένισης *T* η οποία αποδείχθηκε ιδιαίτερα χρήσιμη για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Ευχαριστίες: Η έρευνα συγχρηματοδοτήθηκε από το Ευρωπαϊκό Ταμείο Περιφερειακής Ανάπτυξης και την Κυπριακή Δημοκρατία μέσω του Ιδρύματος Προώθησης Έρευνας (ερευνητικό πρόγραμμα ΤΠΕ/ΠΛΗΡΟ/0609(ΒΙΕ)/11).

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Barnes H.A. (1999), The yield stress – a review or "τα πάντα ρει" – everything flows, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 81: 133-178.

Chatzimina M., Georgiou G.C., Argyropaidas E., Mitsoulis E., Huilgol R. (2005), Cessation of Couette and Poiseuille flows of a Bingham plastic and finite stopping times, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 142: 135-142.

Ferziger J.H., Peric M., Computational methods for fluid dynamics, Springer, 3rd edition, 2002.

Glowinski R., Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer-Verlag, 1984.

Huilgol R., Mena B., Piau J. (2002), Finite stopping time problems and rheometry of Bingham fluids, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 102: 97-107.

Nirmalkar N., Chhabra R., Poole R. (2013), Laminar forced convection heat transfer from a heated square cylinder in a Bingham plastic fluid, Int. J. Heat and Mass Transfer 56: 625-639.

Papanastasiou T.C. (1987), Flows of materials with yield, J. Rheology 31: 385-404.

Papanastasiou T.C., Georgiou G.C., Alexandrou A.N., Viscous fluid flow, CRC press, 1999.

Syrakos A., Georgiou G.C., Alexandrou A.N. (2013), Solution of the square lid-driven cavity flow of a Bingham plastic using the finite volume method, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 195: 19-31.

Syrakos A., Georgiou G.C., Alexandrou A.N. (2014), Performance of the finite volume method in solving regularized Bingham flows: Inertia effects in the lid-driven cavity flow, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 208-209: 88-107.

SUMMARY: The lid-driven cavity problem is very popular in computational fluid dynamics. This work examines what happens if, starting from the steady state, the lid motion is suddenly stopped. Two types of fluids are examined: Newtonian and Bingham fluids. Their behaviour is fundamentally different: Whereas Newtonian flow will perpetually weaken without ever fully ceasing, viscoplastic flow ceases in finite time. The problems are solved for Reynolds numbers in the range $1 \leq Re \leq 1000$ and Bingham numbers in the range $0 \leq Bn \leq 10$, using the finite volume method and the Papanastasiou regularization of the Bingham constitutive equation.

Emergence of coherent structures in barotropic turbulence

Nikolaos A. Bakas[1] and Petros J. Ioannou[2]
[1] Department of Physics, University of Ioannina, [2] Department of Physics, National and Kapodistrian University of Athens
email: nbakas@uoi.gr

ABSTRACT
Planetary turbulence is observed to self-organize into large scale structures such as zonal jets and coherent vortices. One of the simplest models that retains the relevant dynamics of turbulent self-organization is a barotropic flow in a beta-plane channel with turbulence sustained by random stirring. Non-linear integrations of this model show that as the energy input rate of the forcing is increased, the homogeneity of the flow is first broken by the emergence of non-zonal, coherent, westward propagating structures and at larger energy input rates by the emergence of zonal jets. The emergence of both non-zonal coherent structures and zonal jets is studied using a statistical theory, Stochastic Structural Stability Theory (S3T). S3T models a second order approximation to the statistical mean state and allows identification of statistical equilibria and study of their stability. It is found that when the homogeneous turbulent state becomes S3T unstable, coherent structures emerge (non-zonal large scale structures and zonal jets). Analytic expressions for their characteristics (scale, amplitude and phase speed) are obtained and their non-linear equilibration is studied numerically. Direct Numerical Simulations of the nonlinear equations show that the structures predicted by S3T dominate the turulent flow.

Keywords: turbulence self-organization, statistical state dynamics, coherent structures

1. INTRODUCTION

Planetary turbulence is commonly observed to be organized into large scale zonal jets with long-lasting coherent vortices embedded in them. Prominent examples are the banded jets and the Great Red Spot in the Jovian atmosphere (Vasavada and Showman, 2005). The jets control the transports of heat and chemical species in the atmosphere, while the coherent vortices sequester chemical species and heat and produce significant spatiotemporal variability. It is therefore important to understand the mechanisms for the emergence, equilibration, and maintenance of these coherent structures.

The simplest model that retains the relevant dynamics is a turbulent barotropic flow on a β-plane. Numerical simulations of this model have shown that robust, large scale zonal jets emerge in the flow and are sustained at finite amplitude. In addition, large scale westward propagating coherent waves were found to coexist with the zonal jets (Galperin et al., 2010). These large scale waves either obey a Rossby wave dispersion, or propagate with different phase speeds and appear to be sustained by non-linear interactions between Rossby waves. However the mechanism for their excitation and maintenance remains elusive. In this work, we present a theory that predicts the formation and nonlinear equilibration of large scale coherent structures in barotropic β-plane turbulence and then test this theory against nonlinear simulations.

Since organization of turbulence into coherent structures involves complex nonlinear interactions among a large number of degrees of freedom, which erratically contribute to the maintenance of the large-scale structure, an attractive approach is to study the Statistical State Dynamics (SSD) of the turbulent flow, rather than single realizations of the turbulent field. This approach is followed in Stochastic Structural Stability Theory (S3T) which is a second order Gaussian approximation of the full SSD (Farrell and Ioannou, 2003). In S3T the third cumulant is either ignored (Marston et al., 2008) or parameterized as the sum of a known correlation function and a dissipation term (DelSole and Farrell, 1996), which is equivalent to the elimination of the eddy--eddy nonlinearity or its parameterization as random forcing with the required dissipation to remove the energy injected by the forcing. Such a representation is strongly supported by the results of previous studies (Farrell and Ioannou, 1993; DelSole, 2004; Bouchet et al., 2013).

The second order closure results in a nonlinear, autonomous dynamical system that governs the evolution of the mean flow and its consistent second order perturbation statistics. Its fixed points define statistical equilibria, whose instability brings about structural reconfiguration of the mean flow and of the turbulent statistics. Previous studies employing S3T addressed the bifurcation from a homogeneous turbulent regime to a jet forming regime in barotropic beta-plane turbulence and showed that S3T can predict the structure of zonal jets in the turbulent flow (Farrell and Ioannou, 2007, Srinivasan and Young, 2012, Constantinou et al., 2013). In this work we demonstrate that an extended version of S3T can predict the emergence of both zonal and non-zonal coherent structures and can capture their finite amplitude manifestations.

2. FORMULATION OF STOCHASTIC STRUCTURAL STABILITY THEORY

Consider a non-divergent barotropic flow on a β-plane with cartesian coordinates $\mathbf{x}=(x,y)$. The velocity field, $\mathbf{u}=(u,v)$, is given by $(u,v)=(-\partial_y\psi,\partial_x\psi)$, where ψ is the streamfunction. Relative vorticity $\zeta(x,y,t)=\Delta\psi$, evolves according to the non-linear (NL) equation:

$$(\partial_t+\mathbf{u}\cdot\nabla)\zeta+\beta v=-r\zeta-\nu\Delta^2\zeta+f \qquad (1)$$

where $\Delta=\partial_{xx}^2+\partial_{yy}^2$ is the horizontal Laplacian, β is the gradient of planetary vorticity, r is the coefficient of linear dissipation that typically parameterizes surface (Ekman) drag in planetary atmospheres and ν is the coefficient of hyper-diffusion that dissipates enstrophy flowing into unresolved scales. The exogenous forcing term f, parameterizes processes such as small scale convection or baroclinic instability, that are missing from the barotropic dynamics and is necessary to sustain turbulence in this simplified model that lacks vortex stretching. We assume that f is a temporally delta correlated and spatially homogeneous random stirring. We also assume that the forcing is isotropic, injecting energy at a rate ε in a narrow ring of wavenumbers with radius K_f.

We assume a standard Reynolds decomposition of the vorticity field into an averaged field $Z=T[\zeta]$, defined as a time average over an intermediate time scale and deviations from the mean or eddies, $\zeta'=\zeta-Z$. The intermediate time scale is larger than the time scale of the turbulent motions but smaller than the time scale of the large scale motions. With this decomposition, (1) is written as:

$$(\partial_t+\mathbf{U}\cdot\nabla)Z+\beta V+rZ+\nu\Delta^2 Z=-\nabla\cdot T[\mathbf{u}'\zeta'] \qquad (2a)$$

$$(\partial_t+\mathbf{U}\cdot\nabla)\zeta'+v'(\beta+\partial_y Z)+u'\partial_x Z+r\zeta'+\nu\Delta^2\zeta'=f+\nabla\cdot(T[\mathbf{u}'\zeta']-\mathbf{u}'\zeta') \qquad (2b)$$

As in previous studies (Srinivasan and Young 2012), we neglect the eddy-eddy term $(T[\mathbf{u}'\zeta']-\mathbf{u}'\zeta')$ to obtain the quasi-linear system

$$(\partial_t+\mathbf{U}\cdot\nabla)Z+\beta V+rZ+\nu\Delta^2 Z=-\nabla\cdot T[\mathbf{u}'\zeta'] \qquad (3a)$$

$$\partial_t \zeta' = A(\mathbf{U})\zeta' + f \quad (3b)$$

where $A = -\mathbf{U}\cdot\nabla - \left(\beta + \partial_y Z\right)\partial_x \Delta^{-1} + \partial_x Z \partial_y \Delta^{-1} - r + \nu\Delta^2$. Therefore the mean flow is forced by the time mean of the vorticity flux divergence, while the eddies evolve according to the linear dynamics about the instantaneous mean flow $\mathbf{U}$. In order to obtain the statistical dynamics of the quasi-linear system (3) we make the ergodic assumption that the time average over the intermediate time scale is equal to the ensemble average over the forcing realizations, an assumption used previously in studies of atmospheric blocking (Bernstein and Farrell, 2009). Under this assumption, the slowly varying mean flow Z is also the first cumulant of the vorticity $Z = \langle\zeta\rangle$, where the brackets denote the ensemble average. In addition, the time mean of the vorticity flux is equal to the ensemble mean of the flux, $T[\mathbf{u}'\zeta'] = \langle\mathbf{u}'\zeta'\rangle$, which can be expressed as a linear function, *R(C)*, of the eddy vorticity covariance between points $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$, $C(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \langle\zeta'(\mathbf{x}_1,t)\zeta'(\mathbf{x}_2,t)\rangle$. The first cumulant, Z, therefore evolves according to:

$$(\partial_t + \mathbf{U}\cdot\nabla)Z + \beta V + rZ + \nu\Delta^2 Z = -\nabla\cdot\langle\mathbf{u}'\zeta'\rangle = R(C) \qquad (4a)$$

Taking the time derivative of C and using (3b) we obtain the evolution equation for the second cumulant C:

$$\partial_t C + (A_1 + A_2)C = \Xi \quad (4b)$$

where $\Xi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ is the spatial covariance of the homogeneous stochastic forcing and the subscript in A denotes that the coefficients of $A(\mathbf{U})$ are evaluated at $\mathbf{x}_i$ and that it acts only on the variable $\mathbf{x}_i$.

Equations (4) comprise the autonomous S3T system which constitutes a second-order closure for the flow statistics. Being autonomous it may possess statistical equilibria (Z^E, C^E) of the coherent structures with vorticity Z^E, in the presence of an eddy field with covariance C^E. If these equilibria are stable, we expect reflections of the coherent structures Z^E to appear in the nonlinear simulations of (1) and statistics of the eddies to be given by C^E. If these equilibria are unstable, we expect that the turbulent attractor will change its structure and that different structures will emerge and dominate the flow. The S3T system (4) has for $\nu=0$ the equilibrium $Z^E=0$, $C^E=\Xi/2r$, that has zero large scale flow and a homogeneous eddy field with the spatial covariance of the forcing. We will now investigate the stability of this equilibrium as a function of the energy input rate ε and the characteristics of the unstable structures.

3. STABILITY ANALYSIS

The stability of the homogeneous equilibrium is assessed by introducing perturbations $\delta Z = e^{inx+imy+\sigma t}$, $\delta C = e^{in(x_1+x_2)/2+im(y_1+y_2)/2+\sigma t}$, linearizing (4) about the homogeneous equilibrium and calculating the eigenvalues σ for each plane wave with wave-vector $\boldsymbol{n} = (n,m)$. The resulting stability equation for $\sigma(\boldsymbol{n})$ is:

$$\sigma + i\omega_{\boldsymbol{n}} + r = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\frac{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{n}|^2(K_s^2-K^2)(K^2-N^2)\hat{\Xi}(\boldsymbol{k})}{K^4K_s^2N^2[\sigma+2r-i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n}})]} \quad (5)$$

where the integral is over wavenumbers $\boldsymbol{k} = (k,l)$, $K = |\boldsymbol{k}|$, $N = |\boldsymbol{n}|$, $K_S = |\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n}|$, $\omega_{\boldsymbol{k}} = -\beta k/K^2$ is the Rossby wave frequency and $\hat{\Xi}(\boldsymbol{k}) = 2\varepsilon K_f\,\delta\left(K-K_f\right)$ is the Fourier transform of the isotropic ring forcing with spatial covariance Ξ (Bakas and Ioannou 2014). For small values of the energy input rate of the forcing ε, the homogeneous state is stable. When ε exceeds a critical ε_c, the homogeneous flow becomes S3T unstable and coherent structures emerge. The critical energy input rate as a function of the planetary vorticity gradient β is shown in Fig. 1. For $\beta<\beta_{min}$, the most unstable structures are zonal jets that grow in situ (i.e Im[$\sigma(\mathbf{n})$]=0). This is illustrated in Fig. 2 showing the growth rate and the frequency of the unstable structures as a function of the wavenumber. For $\beta>\beta_{min}$, non-zonal structures are more unstable than zonal jets (cf. Fig. 2). As a result, the non-zonal structures first emerge as ε increases (thick line in Fig. 1) and only at significantly higher energy input rates zonal jets are expected to appear (thin line in Fig. 1). The non-zonal structures are propagating (i.e Im(σ_i)≠0) (cf. Fig. 2) and for energy input rates close to the critical value, they propagate in the retrograde direction and follow the Rossby wave dispersion, that is Im[$\sigma(\mathbf{n})$]=$\omega_{\mathbf{n}}$.

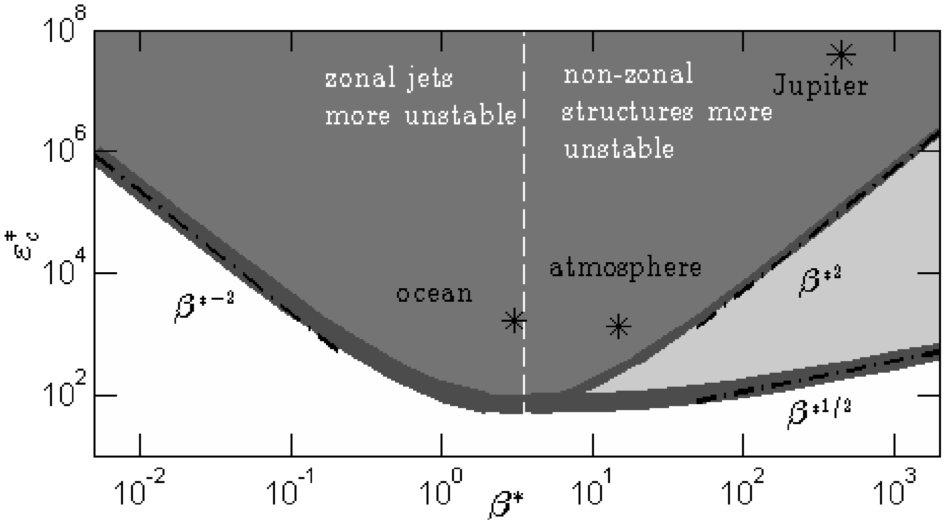


Fig. 1. The non-dimensional critical energy input rate $\varepsilon_c^* = \varepsilon_c K_f^2/r^3$ for the emergence of large-scale structure (thick line) and the critical energy input rate for the emergence of zonal jets (thin line) as a function of non-dimensional planetary vorticity gradient $\beta^* = \beta K_f/r$. The asymptotic behavior of the critical curve for $\beta^*>>1$ and $\beta^*<<1$ is also shown (dash-dot) and parameter values for the Earth's atmosphere, Earth's ocean and Jupiter's atmosphere are marked with stars.

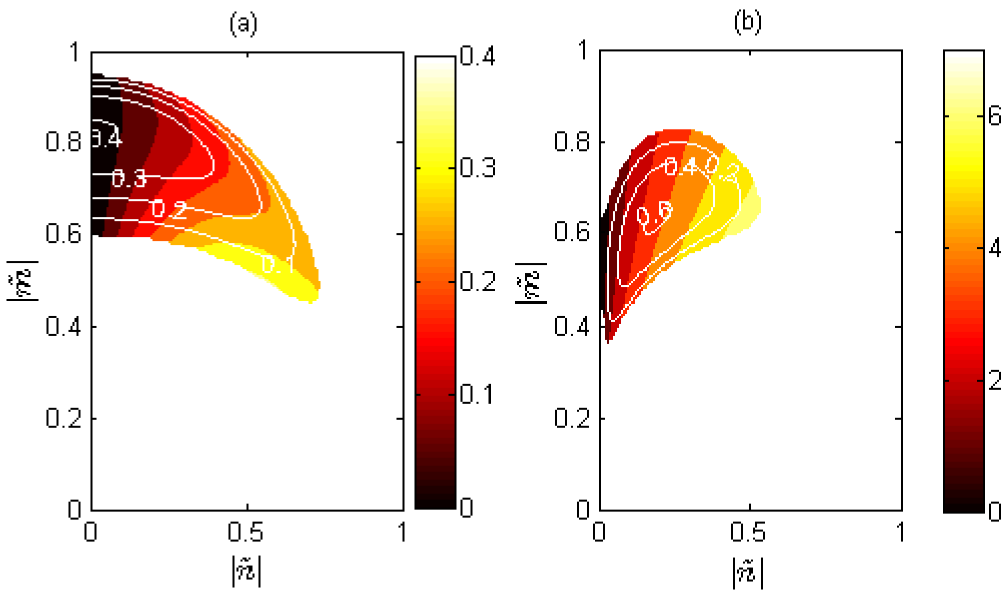


Fig. 2. Non-dimensional growth rate Re(σ/r) (contours) and frequency Im(σ/r) (shading) as a function of the integer valued non-dimensional wavenumbers ($|n|$,$|m|$)/K_f of the emerging structure for (a) β^*=1 and (b) β^*=1. The energy input rate in both panels is ε=2ε_c.

4. EQUILIBRATION OF THE INSTABILITIES AND COMPARISON TO DNS

The equilibration of the instabilities is studied by numerically integrating the S3T system (4) in a doubly periodic 2π x 2π channel using finite differences for calculating the spatial derivatives and a fourth-order Runge-Kutta scheme for time stepping. We consider the parameter values K_f=10, β=10, r=0.01 and ν=1.9x10^{-6} yielding a non-dimensional planetary vorticity gradient $\tilde{\beta} = 100$. Therefore the integration is in the parameter region of Fig. 1 in which the non-zonal structures are more unstable than zonal jets. The eigenvalue relation can be readily derived for a periodic channel by substituting the integrals with summation over integer values of the wavenumber $\boldsymbol{k} = (i, j)$, with $i, j \in \mathbb{Z}$.

We first consider the energy input rate $\varepsilon=4\varepsilon_c$ for which zonal jets are stable and the structure with $\boldsymbol{n}$=(1, 5) is the most unstable. Starting from a small random perturbation, a checkerboard perturbation of the form

$$Z = \cos(x)\cos(5y) \qquad (6)$$

emerges and grows exponentially dominating the flow. At this point the large scale flow gets attracted to the travelling wave finite-amplitude equilibrium structure shown in Fig. 3 that is very close in form to the checkerboard unstable harmonic eigenfunction (6). The Hovmoller diagram of $\psi(x,y=\pi/4,t)$ also

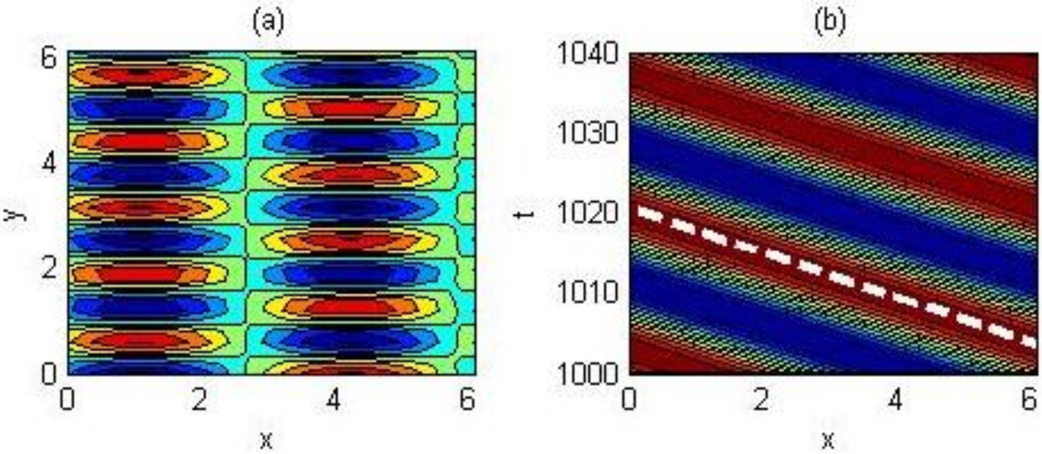


Fig. 3. (a) Streamfunction of the equilibrated structure for $\varepsilon=4\varepsilon_c$. (b) Hovmoller diagram of $\psi(x,y=\pi/4,t)$. The phase speed of the most unstable eigenfunction is also shown (dashed line).

shown in Fig. 3 illustrates that the wave propagates in the retrograde with a speed approximately equal to the phase speed of the unstable eigenfunction. We next consider the case $\varepsilon=30\varepsilon_c$. For this highly supercritical value of the energy input rate the most unstable non-zonal structure grows but cannot equilibrate as the finite-amplitude non-zonal travelling equilibria become S3T unstable to zonal jet perturbations. This is illustrated in Fig. 4 showing the evolution of the harmonic function (5). After the saturation of the instability at about t=100, the flow transitions slowly from the traveling wave structure (shown in the left inset in Fig. 4) to the equilibrium state shown in the right inset in Fig. 4. The equilibrated structure is a mixed state consisting of a zonal jet with ($|n|$, $|m|$)=(0,5) and lower amplitude ($|n|$, $|m|$)=(1,5) westward propagating waves embedded in it. Therefore we expect two regime changes as the energy input rate increases. The first occurring at ε_c with the emergence of non-zonal structures and the second with the dominance of the zonal jet-mixed states when the non-zonal structures become secondarily unstable. These two regime transitions can be clearly revealed by calculating two proxies for the amplitude of non-zonal structures and zonal jets, the zmf and nzmf

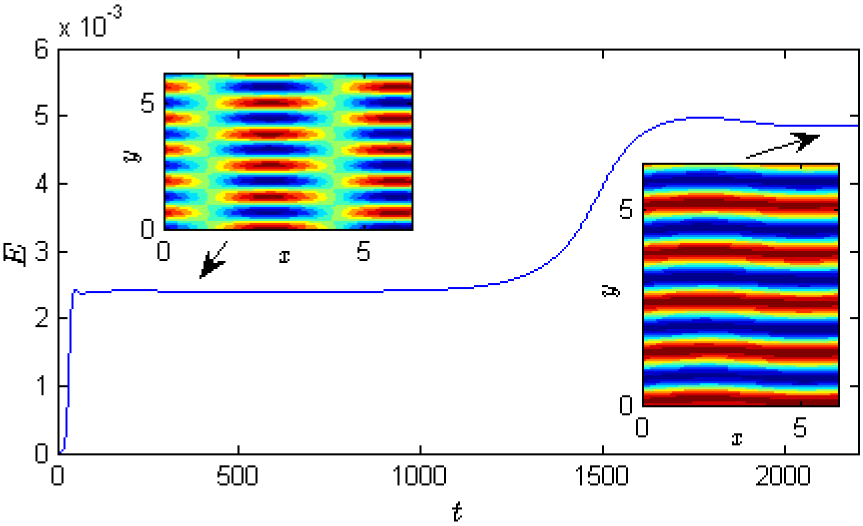


Fig. 4. Energy evolution of random initial conditions for $\varepsilon=30\varepsilon_c$. The insets show a snapshot of the streamfunction at t=200 (left) and t=2200 (right).

indices defined as the ratio of the energy of zonal jets and non-zonal structures respectively with scales lower than the scale of the forcing over the total energy:

$$zmf = \frac{\sum_{l<K_f} \hat{E}(k=0,l)}{\sum_{k,l} \hat{E}(k,l)}, \quad nzmf = \frac{\sum_{k,l<K_f} \hat{E}(k,l)}{\sum_{k,l} \hat{E}(k,l)} - zmf, \quad (7)$$

where $\hat{E}(k,l)$ is the time averaged energy power spectrum of the flow and k, l are the zonal (x) and meridional (y) wave numbers, respectively. These indices that are calculated for the S3T integrations, are shown in Fig. 5 as a function of the energy input rate ε. As the energy input rate increases, the non-

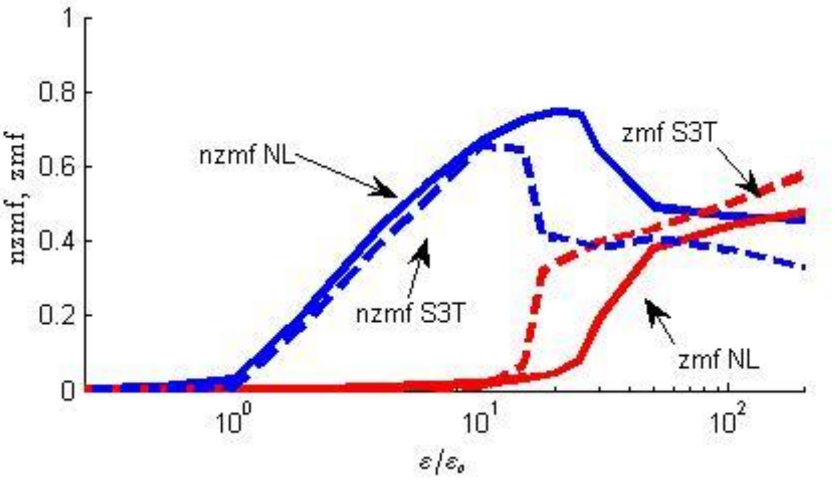


Fig. 5. zmf and nzmf indices defined in (7) as a function of the energy input rate, for the NL and S3T integrations.

zonal structures emerge for $\varepsilon>\varepsilon_c$ and equilibrate at larger amplitudes and nzmf increases. For $\varepsilon/\varepsilon_c>15$ the finite amplitude non-zonal equilibria are S3T unstable to zonal jet perturbations and the structures with the largest domain of attraction are the mixed states dominated by their zonal jet component resulting in an increase of zmf and a concomitant decrease of nzmf.

The results of the S3T analysis are now compared to Direct Numerical Simulations of (1). Equation (1) is solved using a pseudospectral code with a 128x128 resolution and a fourth-order Runge-Kutta scheme for time stepping and we choose the same parameters as in the S3T integrations. The zmf and nzmf indices calculated from long time averages after the system has reached a statistical equilibrium are shown in Fig. 5. We observe that the S3T stability analysis accurately predicts the critical ε_c for emergence of non-zonal structures in the DNS of the turbulent flow as well. The finite amplitude equilibria obtained when $\varepsilon>\varepsilon_c$ also correspond to the dominant structures in the nonlinear simulations. For $\varepsilon=4\varepsilon_c$, the time averaged energy spectra shown in Fig. 6 exhibit significant power at $(|k|,|l|)=(1,5)$, corresponding to the equilibrated S3T structure shown in Fig. 3. Remarkably, the phase speed of these waves observed in the nonlinear simulations and the amplitude of these structures as illustrated by the

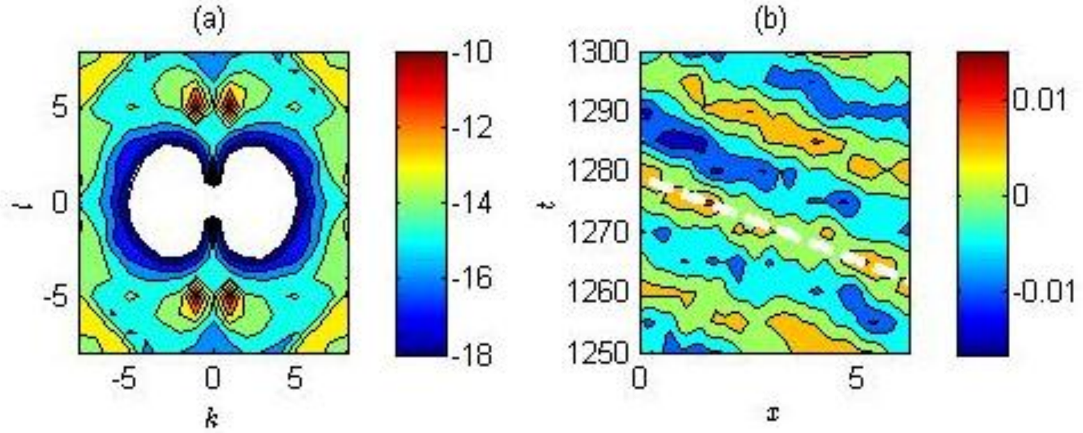


Fig. 6. (a) Time averaged energy power spectra obtained from the NL simulations for $\varepsilon=4\varepsilon_c$. (b) Hovmoller diagram of $\psi(x,y=\pi/4,t)$. The phase speed of the most unstable S3T eigenfunction in this case is also shown (dashed line).

nzmf index are approximately equal to the phase speed and amplitude of the corresponding S3T translating equilibrium structure (cf. Figs. 3, 6). An excellent agreement is also observed for the second regime as well in which zonal jets (mixed states) are the dominant structures. The energy spectra calculated at $\varepsilon=30\varepsilon_c$ (not shown) exhibit a peak at the zonal mode with $(|k|,|l|)=(0,5)$ but there is also finite power in the non-zonal structures with $(|k|,|l|)=(1,5)$, that is the two constituents of the mixed state in the S3T integrations. The amplitude of both the zonal and non-zonal components is also in good agreement with the S3T integrations as revealed by the comparison of the zmf and nzmf indices with the corresponding indices obtained from S3T in this regime (cf. Fig. 5).

5. CONCLUSIONS

In summary, we presented a theory for the emergence of zonal jets and non-zonal coherent structures in barotropic turbulence. Nonlinear simulations of a stochastically forced barotropic flow in a beta-plane channel show two major flow transitions as the energy input rate of the forcing increases. In the first, the translational symmetry in the flow is broken with the emergence of propagating coherent non-zonal waves that approximately follow the Rossby wave dispersion. The power in these non-zonal structures increases with the energy input rate until the second transition occurs with the emergence of robust zonal jets.

The two flow transitions and the characteristics of both the non-zonal structures and the zonal jets are investigated using S3T. In S3T, the turbulent flow dynamics and statistics are expressed as a systematic cumulant expansion which is truncated at second order. With the interpretation of the ensemble average as a Reynolds average over the fast turbulent eddies, the second-order cumulant expansion results in a closed, nonlinear dynamical system that governs the joint evolution of slowly varying, spatially localized coherent structures with the second-order statistics of the rapidly evolving turbulent eddies.

The linear stability of the homogeneous S3T equilibrium with no mean velocity was examined analytically. Structural instability was found to occur when the energy input rate is larger than a certain threshold. It was found that for weak (strong) planetary vorticity gradient β the maximum growth rate occurs for stationary zonal structures (propagating large-scale non-zonal structures). The equilibration of the unstable, exponentially growing coherent structures for large β was then studied through numerical integrations of the S3T dynamical system. When the forcing amplitude is slightly supercritical, the finite-amplitude travelling wave equilibrium has a structure close to the corresponding unstable non-zonal perturbation with the same scale. When the forcing amplitude is highly supercritical, the instabilities equilibrate to mixed states consisting of strong zonal jets with smaller-amplitude travelling waves embedded in them.

The predictions of S3T were then compared with the results obtained in the nonlinear simulations. The critical threshold above which coherent non-zonal structures are unstable according to the stability analysis of the S3T system was found to be in excellent agreement with the critical value above which non-zonal structures acquire significant power in the nonlinear simulations. The scale, phase speed and amplitude of the dominant structures in the nonlinear simulations were also found to correspond to the structures predicted by S3T. In addition, the threshold for the emergence of jets, which is identified in S3T as the energy input rate at which an S3T stable, finite-amplitude zonal jet equilibrium exists, was found to roughly match the corresponding threshold for jet formation in the nonlinear simulations, with the emerging jet scale and amplitude being accurately obtained using S3T.

In summary, S3T predicts the two regime transitions in the turbulent flow as the energy input rate is increased: the emergence of coherent, propagating non-zonal structures and the emergence of zonal jets. It also predicts the characteristics of the emerging structures (their scales and their phase speed), as well as their amplitude.

References

Bakas, N. A., and P. J. Ioannou (2014) A theory for the emergence of large scale structures in beta-plane turbulence. J. Fluid Mech. 740, 312

Bernstein, J. and B. F. Farrell (2009) Low frequency variability in a turbulent baroclinic jet: eddy-mean flow interactions in a two-level model. J. Atmos. Sci. 67:452–467

Bouchet, F., Nardini, C. and T. Tangarife (2013) Kinetic theory of jet dynamics in the stochastic barotropic and 2D Navier–Stokes equations. J. Stat. Phys. 153, 572–625.

Constantinou NC, Ioannou PJ and Farrell BF (2014) Emergence and equilibration of jets in barotropic beta-plane turbulence. J. Atmos. Sci. (in press)

DelSole, T. (2004) Stochastic models of quasigeostrophic turbulence. Surv. Geophys. 25, 107–194.

DelSole, T. and B. F. Farrell (1996) The quasi-linear equilibration of a thermally maintained, stochastically excited jet in a quasigeostrophic model. J. Atmos. Sci. 53, 1781–1797.

Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (1993) Stochastic dynamics of baroclinic waves. J. Atmos. Sci. 50, 4044–4057.

Farrell, B. F., and P. J. Ioannou (2003) Structural stability of turbulent jets. J. Atmos. Sci. 60:2101-2118

Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2007) Structure and spacing of jets in barotropic turbulence. J. Atmos. Sci. 65:3352-3355

Marston, J. B., Conover, E. and T. Schneider (2008) Statistics of an unstable barotropic jet from a cumulant expansion. J. Atmos. Sci. 65, 1955–1966.

Galperin BH, Sukoriansky S and Dikovskaya N (2010) Geophysical flows with anisotropic turbulence and dispersive waves: flows with a β-effect. Ocean Dyn. 60:427–441

Srinivasan, K. and W. R. Young (2012) Zonostrophic instability. J. Atmos. Sci. 69, 1633–1656.
Vasavada, A. R. and A. P. Showman (2005) Jovian atmospheric dynamics. An update after Galileo and Cassini. Rep. Prog. Phys. 68, 1935–1996.

ENABLING COMMERCIAL CFD CODES TO PERFORM NONLINEAR ANALYSIS

E. D. Koronaki, N. Cheimarios, A. G. Boudouvis
School of Chemical Engineering, NTUA
ekor@mail.ntua.gr, nixeimar@chemeng.ntua.gr, boudouvi@chemeng.ntua.gr

ABSTRACT
A computational framework is presented for enabling commercial, "black-box" Computational Fluid Dynamics codes to perform certain nonlinear analysis tasks that contribute significantly to the understanding of the studied physical problem. Among those tasks are parameter continuation along entire solution branches and stability analysis. The former, is important for the identification of ranges of operating parameters where multiple solutions exist. The stability of each solution is determined as a by-product of the method. When among the multiple solutions there are periodic orbits, the main idea is adjusted to compute the frequency and amplitude of the oscillation. The additional tasks do not require any alteration of the CFD model or intervention on the solver. The illustrative example here is that of a flow around a cylinder, where for varying Re numbers a branch of periodic solutions emanates from a branch of stationary ones. Stable and unstable, stationary and periodic states are computed for the same parameter values.

Keywords: Nonlinear phenomena, CFD software, solution multiplicity, periodic solutions

1. INTRODUCTION
In the past several years Computational Fluid Dynamics (CFD) codes have established themselves as valuable tools both for industrial and academic use. This is due to the combined effect of the advances in the numerical methods that contribute to fast and efficient solvers, the specialization of commercial CFD codes in a wide range of subjects and finally the availability of low-cost computational resources. It is now feasible and economical to tackle realistic, complex problems with a commercial CFD code.
In dealing with realistic physical problems, both in an experimental and a computational setting, their nonlinear nature has to be accounted for. Nonlinearity "hints" at phenomena such as the existence of multiple solutions for the same operating conditions (solution multiplicity) and their respective stability and also the existence of non-stationary solutions, periodic or even chaotic.
Systematic parameter continuation unravels entire solution branches that possibly contain more than one stable solution for the same parameter values. Stand-alone CFD codes are not able to perform this task because they cannot convergence on unstable states which oftentimes connect different branches of stable solutions. Most works in the past (Henderson, 1997; van Santen et al., 2001; Thompson et al., 1996; Kushnir et al., 2014), where nonlinear phenomena were analysed in CFD applications, have used home-made codes where continuation algorithms and eigenvalue analysis of the available matrices was used to provide the desired information. More recently a new idea was presented for a computational module that wraps around commercial CFD codes and enables systematic continuation and stability analysis. The concept is applied on a model of a Chemical Vapor Deposition (CVD) reactor (Cheimarios et al., 2011; 2012) where the competition of free convection, due to the temperature differences and forced convection, due to the velocity of the incoming gas feed, leads to

solution multiplicity. Over a range of parameter values, a branch of buoyancy dominated stable states co-exists with a branch of forced convection dominated stable states. The two branches are connected with a branch of unstable solutions upon which the stand-alone CFD code cannot converge. In the region of multiplicity, the stand-alone code may converge on either stable branch at random.

In this work, we take this idea a step further and expand the methodology to cases where stationary solutions co-exist with periodic ones. The illustrative example is that of a flow around an infinite length cylinder (Henderson, 1997). Experimental and numerical studies have indicated the transition from a stationary flow at low Re numbers to a periodic regime, in two dimensions for Re ≈ 46 (Jackson, 1987; Mathis et al., 1987). At even higher Re numbers two additional critical parameter points are identified at Re ≈ 190 and Re ≈ 260 where the flow loses stability when subjected to three-dimensional perturbations.

The module-enhanced CFD model is able to converge upon the stationary solution branch even when the solutions lose stability. The eigenvalue analysis that is a by-product of the method, is able to determine the critical parameter value with accuracy without further analysis or computational effort. The module is adjusted appropriately by adding an extra constraint in order to compute the stable periodic solutions that branch out from the stationary solution branch.

The paper is structured as follows: a brief presentation of the physical problem is followed by an overview of the Recursive Projection Method which is the basis or the proposed module. Two variations of the method are presented, one for arc-length continuation and one for the computation of the period of the orbit. The results of the implementation are presented and prove in excellent agreement with the literature.

2. MODEL DESCRIPTION

2. 1 Application: flow around a cylinder

The benchmark application for the proposed methodology is a circular cylinder of radius r=1, with its cross-section on the (x,y) plane, exposed to the uniform flow of a fluid with density, ρ=1, and kinematic viscosity, ν = 1. Given that the velocity of the fluid far away from the cylinder is uniform, U, the Reynolds number is equal to Re= U d/ν; d here is the diameter of the cross-section.

The velocity and pressure fields, **u** and **ps** respectively are given by the Navier-Stokes equations,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\mathbf{u} + \nabla\mathbf{ps} = 0; \\ &\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

along with the no-slip boundary condition on the surface of the cylinder and the assumption of uniform fluid velocity, U=1m/s far away from it.

The set of governing equations and boundary conditions are discretized with the finite volume method and solved with the commercial CFD code ANSYS/Fluent (henceforth Fluent) (www.ansys.com, FLUENT, 2014).

For the purposes of this work, in order to apply the proposed computational module, it is convenient to think of Fluent in terms of a time-stepper of the general form:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{n}, \mathrm{Re}), \quad \mathbf{U} \in \mathrm{R}^{N} \qquad (2)$$

Fluent is viewed as a function, **F**, of the solution vector at the n-th iteration, $\mathbf{U}^n$, for a particular value of the Re number that yields the solution at the next iteration, $\mathbf{U}^{n+1}$. In practice, Fluent has to deliver to the external module the vector $\mathbf{U}^n$ after a predefined number of time-steps. Also, Fluent must be able to read the solution vector provided by the computational module and initialize the subsequent iterations with the new value of **U**. This exchange of information is possible through a user defined function (UDF), programmed in C.

2. 2 The computational module: Recursive projection method (RPM)

In this section, a brief discussion of the recursive projection method is offered. The method is described in detail by Shroff and Keller (1993) and in its implementation in (Cheimarios et al., 2011). The RPM was initially proposed for the stabilization of fixed point iterative procedures such (2). Henceforth in this paragraph, the dependence on the parameter Re is implied but not explicitly written. Consider the invariant subspace **P** that corresponds to the, usually few, eigendirections in which the linearized map, **F**, is slowly contracting or even slowly expanding. Let **Q** be its orthogonal complement. By P and Q we denote the orthogonal projectors of $\mathbf{R}^N$ on **P** and **Q** respectively. The solution **U** is decomposed into **p** and **q** such that $\mathbf{U} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, where **p** and **q** are the projections of $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ onto P and Q , respectively:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= P\mathbf{F}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \\ \mathbf{q} &= Q\mathbf{F}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \end{aligned} \tag{3}$$

Under certain assumptions, the RPM stabilizes fixed-point iterative procedures such as Eqn. (2) by first computing an approximation of **P** and consequently of **Q**. The projection **p** is then computed by performing a Newton's method step on P; **q** is determined by the projection of $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ on Q. Subsequently, the Picard iteration acts on the sum, $\mathbf{U} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$. The fixed-point iteration (2) is stable when all the eigenvalues of the matrix $\mathbf{F_U}(\mathbf{U}) \equiv \partial\, \mathbf{F}/\partial \mathbf{U} \in \mathbf{R}^{N\times N}$ lie in the unit disk.

Let $l_\mathbf{Z}$ be the number of the usually few eigenvalues of $\mathbf{F_U}$ (typically O(10)) close to the unit circle and the dimension of **P** and $\mathbf{Z} \in \mathbf{R}^{N\times l_Z}$ an orthonormal basis of the invariant subspace **P.** Then the matrix

$$\mathbf{H} = \mathbf{Z}^T \mathbf{F_U} \mathbf{Z} \in \mathbf{R}^{l_Z \times l_Z} \tag{4}$$

is the projection of $\mathbf{F_U}$ on the invariant subspace.

The projectors P and Q can be expressed in terms of the basis $\mathbf{Z} \in \mathbf{R}^{N\times l_Z}$ which is built and updated in the course of continuation every n_{max} iterations: $P = \mathbf{ZZ^T}$, $Q = \mathbf{I} - \mathbf{ZZ^T}$, $\mathbf{Z^T Z} = \mathbf{I}_{lZ}$. Using these projections on low dimensional subspaces, the Newton step described above is performed using small Jacobian matrices and minimal computational cost.

The complete algorithm implementing RPM around Fluent is summarized below:

Algorithm 1.

(i) initialization, define $\mathbf{U}^0$; $\mathbf{Z}= \mathbf{0}$; $\mathbf{H}= \mathbf{0}$; define tol; define n_{max}; n= 0; $l_Z = 0$
(ii) Fluent: evaluate $\mathbf{F} \leftarrow \mathbf{F}(\mathbf{U}^0)$
while($\|\mathbf{U} - \mathbf{F}\|_2 > tol$)
(iii) $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{Z^T U}$; $\boldsymbol{\zeta} \leftarrow \mathbf{Z^T F}$; $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{U} - \mathbf{Zz}$
(iv) $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{z} + (\mathbf{I}_{lZ} - \mathbf{H})^{-1}(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z})$; $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{F} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\zeta}$
(v) $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{Zz} + \mathbf{q}$
(vi) Fluent: $\mathbf{F} \leftarrow \mathbf{F}(\mathbf{U})$
(vii) n←n+1
if ($n = n_{max}$) then
(viii) increase l_Z; update basis **Z**; compute $\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{Z^T}[\mathbf{F_U\, Z}]$
(ix) n←0
endif
endwhile

where n is a counter used which is nullified each time **Z** is updated. In this procedure, the iteration $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ is the result of time-integration over a predetermined time-interval performed by Fluent with initial solution **U**.

2. 3 RPM for arc-length continuation and computation of periodic solutions

The Newton iteration performed on the low dimensional subspace **P**, step (iv) of Algorithm 1 can be augmented with additional constrains according to the particularities of the underlying physical problem. One such constraint is the arc-length equation that changes the parametrization from the physical parameter to the arc-length of the solution curve. This enables convergence along solution branches with multiplicity (Koronaki et al. 2003). Another constraint is a so-called pinning-condition, for the computation of periodic solutions (Lust et al. 1998). These two additions are presented in the following paragraphs.

2. 3. 1 Pseudo arc-length continuation

The iteration presented in Algorithm 1 fails to converge when the matrix ($\mathbf{I}_{lZ} - \mathbf{H}$) becomes singular, i.e. when eigenvalues cross the limit of the unit disk. This happens at singular points which correspond to turning points or bifurcation points. The arc-length constraint introduces the new parameter s and in the new parametrization the turning point does not exist because arc-length increases monotonically along the branch. The original coupled iteration is augmented by a new scalar constraint:

$$\mathrm{N}(\mathbf{p},\lambda_p,s) \equiv \dot{\mathbf{p}}^T(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0) + \dot{\lambda}_p(\lambda_p - \lambda_{p0}) - (s - s_0) = 0 \tag{5}$$

Notice that N depends only on **p** since the matrix ($\mathbf{I}_{lZ} - \mathbf{H}$) that becomes singular is the projection of ($\mathbf{I} - \mathbf{F_U}$) on the low dimensional subspace **P**. Here $\mathbf{p_0}$ and λ_{p0} are the values of **p** and λ_p at a given initial value of the parameter s_0; $\dot{\mathbf{p}}$ and $\dot{\lambda}_p$ are tangents along the solution path and in practice they are replaced by the approximations:

$$\dot{\mathbf{p}} \approx \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)}{(s-s_0)} \qquad \dot{\lambda} \approx \frac{(\lambda_p - \lambda_{p0})}{(s-s_0)} \tag{6}$$

Given initial estimates for **u** and λ_p at s, the resulting augmented coupled iteration reads:

(i) $\begin{pmatrix} \mathbf{p}^{n+1} \\ \lambda_p{}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^{n} \\ \lambda_p{}^{n} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I}-\mathbf{f_p} & -\mathbf{f}_{\lambda_p} \\ \dot{\mathbf{p}}^T & \dot{\lambda}_p \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^n - \mathbf{f}^n \\ \mathrm{N}^n \end{pmatrix}$

(ii) $\mathbf{q}^{n+1} = Q\mathbf{F}^n + Q\mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}_p}{}^n \Delta\lambda_p{}^n$

A more detailed presentation of the Algorithm and its implementation can be found in (Cheimarios et al., 2012).

2. 3. 2 Computation of Periodic Solutions

The RPM is a specific implementation of the so-called Newton-Picard methods for the computation and determination of stability of periodic solutions of a parameter-dependent autonomous dynamical system:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{h}(\mathbf{x},\lambda_p), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N, \lambda_p \in \mathbf{R} \tag{7}$$

For fixed parameter λ_p, a periodic solution is determined by N+1 unknowns, i.e. the initial condition $\mathbf{x(0)} \in \mathbf{R}^N$ and the period T. To find these unknowns the following system must be solved:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(T) - \mathbf{x(0)} = \mathbf{0} \\ &s_p(\mathbf{x(0)}, T) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

The second equation is a phase condition required in order to eliminate the invariance of periodic solutions of autonomous dynamical systems under time translation. What this means is that if T is the period of a solution, so is nT with n=1,2,3,4,…∞. This phase condition limits the computed period to T. In the computations discussed bellow, s_p is a linear phase condition:

$$s_p(\mathbf{x(0)},\mathrm{T},\lambda_p) := \mathbf{h}(\mathbf{x(0)}^{(0)},\lambda_p)^{\mathrm{T}}(\mathbf{x(0)}-\mathbf{x(0)}^{(0)}) = 0 \tag{9}$$

where $\mathbf{x(0)}^{(0)}$ is the starting value of the iterations. In practice it is the solution in a previous but close parameter value.
Let $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x(0)},\mathrm{T},\lambda_p)$ denote the outcome of (7) at t=T with initial condition **x(0)**, then (8) is written as:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x(0)},\mathrm{T},\lambda_p)-\mathbf{x(0)} \\ s_p(\mathbf{x(0)},\mathrm{T},\lambda_p) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{10}$$

and its solution is denoted by $(\mathbf{x(0)}^*,\mathrm{T}^*,\lambda_p)$. The functions $\boldsymbol{\varphi}$ and s_p are considered to be twice differentiable with respect to **x(0)**, T and λ_p.
The matrix $\mathbf{M}^*$ given by

$$\mathbf{M}^* := \left.\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x(0)}^*,\mathrm{T}^*,\lambda_p)} \tag{11}$$

is the monodromy matrix. Its eigenvalues, μ_i with i=1,2,…,N, (called Floquet multipliers) determine the stability of the periodic orbit. The orbit is linearly stable if | μ_i | <1 for all I, otherwise is orbit is considered unstable.
The system of nonlinear equations (10) can be solved with Newton's method. Each Newton step requires the solution of the linear system:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{x(0)}}-\mathrm{I} & \dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathrm{T}} \\ \dfrac{\partial s_p}{\partial\mathbf{x(0)}} & \dfrac{\partial s_p}{\partial\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x(0)} \\ \Delta\mathrm{T} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x(0)},\mathrm{T},\lambda_p)-\mathbf{x(0)} \\ s_p(\mathbf{x(0)},\mathrm{T},\lambda_p) \end{bmatrix}$$

When N is large this is not feasible or practical because the jacobian $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{x(0)}}$ must be calculated using finite differences, with each function evaluation requiring the solution of an initial value problem. Newton-Picard methods such as the RPM seek to reduce the computational cost of the Newton iteration assuming that there are "a few", for example m, eigenvalues μ of $\mathbf{M}:=\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{x(0)}$ whose magnitude is close to 1 whereas the remaining N-m eigenvalues have magnitude close to zero.I accordance to the case for the arc-length parametrization, the new augmented system is:

i) $\begin{bmatrix} \mathbf{p}^{n+1} \\ \mathrm{T}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{n} \\ \mathrm{T}^{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p-\mathbf{I} & \mathbf{f}_T \\ \partial s_p/\partial\mathbf{p} & s_T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^n-\mathbf{f}^n \\ s_p{}^n \end{bmatrix}$

ii) $Q\mathbf{F}^{n+1} = Q\mathbf{F}^{n} + Q\mathbf{F}_T{}^{n}\Delta\mathrm{T}^{n}$

The algorithm for the Newton-Picard iteration is as follows:

Algorithm 2.
Initialization: $\mathbf{Z}=\mathbf{0}$; define tol; define n_{max}; n=0; ds; $(\mathbf{x(0)}^{*},T^{*},\lambda_{p0})$; step size = $d\gamma$; $\mathbf{x(0)}_{\mathbf{ref}}=\mathbf{x(0)}^{*}$
while $(\gamma<\gamma_{max})$
(i) evaluate $\boldsymbol{\varphi}^{0}=\boldsymbol{\varphi}\,(\mathbf{x(0)}^{*},T^{*},\lambda_p)$;
(ii) define $h_{init}=\mathbf{h}(\mathbf{x(0)}^{(0)},T^{(0)},\lambda_p)$;
(iii) Fluent: evaluate $\boldsymbol{\varphi}^{1}\leftarrow\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x(0)}^{(0)},T^{(0)},\lambda_p)$; $\mathbf{r}=\boldsymbol{\varphi}^{1}-\boldsymbol{\varphi}^{0}$
(iv) Evaluate $\boldsymbol{\varphi}_T:=\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial T$
$\nu = 0$; m = 0
while $(\|\mathbf{r}\|_2>tol)$
(v) $\mathbf{z}\leftarrow\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\varphi}^{0}$; $\boldsymbol{\zeta}\leftarrow\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\varphi}^{1}$; $\mathbf{q}\leftarrow\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x(0)}^{(0)},T,\lambda_p)-\mathbf{Zz}$;
$\mathbf{q}\leftarrow\boldsymbol{\varphi}^{1}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\zeta}$; $s_p\leftarrow\mathbf{h}_{init}\,(\boldsymbol{\varphi}^{1}-\mathbf{x(0)}_{\mathbf{ref}})$;

(vi) evaluate derivative $[\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}\mathbf{Z}]$; $\mathbf{H}\leftarrow\mathbf{Z}^{T}[\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}\mathbf{Z}]$;

(vii) $$\begin{pmatrix}\delta\mathbf{z}\\ \delta T\end{pmatrix}\leftarrow\begin{bmatrix}\mathbf{I}_m-\mathbf{H} & -\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\varphi}_T\\ \mathbf{h}^{T}_{init}\,\mathbf{Z} & \mathbf{h}^{T}_{init}\,\boldsymbol{\varphi}_T\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\zeta-\mathbf{z}\\ -s_p\end{pmatrix}$$

(viii) $\mathbf{z}=\mathbf{z}+\delta\mathbf{z}$; $\mathbf{q}\leftarrow\varphi^{0}\text{-}\mathbf{Z}\zeta+(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{T}}\text{-}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{T}})\,\delta T$;
$\mathbf{x(0)}\leftarrow\mathbf{Zz}+\mathbf{q}$; $T\leftarrow T+\delta T$;

(ix) Evaluate: $\varphi\,(\mathbf{x(0)},T,\lambda_p)$; $\mathbf{r}=\varphi^{1}-\varphi(\mathbf{x(0)},T,\lambda_p)$; $\varphi^{0}=\varphi^{1}$;
(x) $n\leftarrow n+1$

if $(n=n_{max})$ then
(xi) increase m; update basis $\mathbf{Z}$; compute $\mathbf{H}\leftarrow\mathbf{Z}^{T}[\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}\mathbf{Z}]$
(xii) $n\leftarrow 0$
endif
endwhile
$\lambda_p=\lambda_p+\delta\lambda_p$;
endwhile

2. 3. 3 Implementation details

For the implementation of the computational module, information must be exchanged with Fluent in every outer iteration, i.e. each time Fluent is executed. First of all, the solution vector has to be delivered by the module in the beginning of CFD iterations and it must be read back by the RPM once the predefined number of inner, or CFD iterations, is reached.
It is also possible to have the CFD code read the time-step of the iteration from a file. This is useful for initial testing, but it is not something that has to be altered once a suitable value is determined. The number of time steps that the CFD code will perform and the number of iterations per time step are set in the script that is executed every time that Fluent is called by the module. In addition, for the arc-length module, the value of the physical parameter that is updated by the method must be provided to the CFD code each time it is executed. For the periodic module, it is the period that is altered at each iteration and information about the number of time-steps must be given to the code.

3 RESULTS

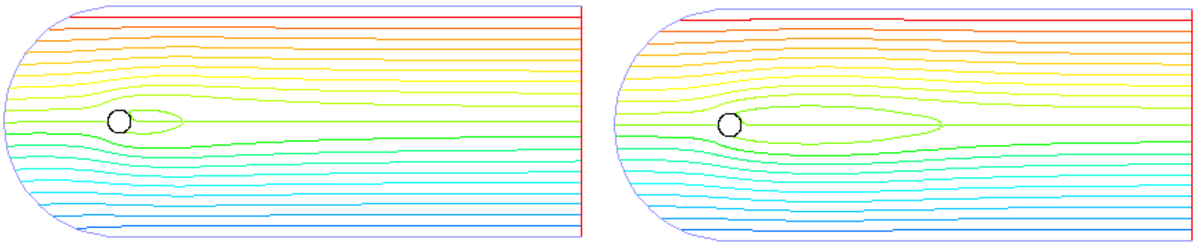
3. 1 Stationary Solutions

The first task is to trace the stationary solution branch and identify critical parameter values. Each time Fluent is called, time-integration advances over 15 time-steps with size dt=1 sec. At each time-step, a maximum of 400 iterations is allowed even though in most cases Fluent reaches the predetermined tolerance, i.e.1.e-7, in far less iterations (ranging typically from 10 to 50). The starting point for every continuation algorithm is a couple of solutions on the branch, here for Re=10 and Re=12. These solutions are used in order to compute an estimate for the solution in the next parameter value with some accuracy. In the course of branch tracing, the RPM-basis, **Z**, built in the initial parameter values is maintained for the subsequent ones, adding to the economy of the method.

The implementation of the arc-length continuation method imposes convergence on the stationary solution branch for Re values well passed the critical value. By monitoring the eigenvalues of the reduced jacobian matrix **H**, defined in (4) it is possible to determine the critical parameter value. This is achieved with minimal extra cost since the size of **H** does not get larger than 6 x 6. Here a Hopf point is found at $\mathrm{Re} \approx 44$ which is considered in good agreement with other findings taking into account the various values found in the literature, i.e. at $\mathrm{Re} \approx 46.5$ (Henderson 1997). A typical stable, stationary flow (Re = 41) is shown in Figure 1a, whereas a typical unstable stationary flow (Re = 157) is shown in Figure 1b.

At the Hopf point a pair of conjugate complex eigenvalues crosses the limit of stability, the unit circle. The spectrum of **H** just before and just past the critical parameter value are shown in Figure 2 showing this transition.

An interesting by-product of the method, is the dominant eigenvector of the problem at the Hopf point that can be reconstructed from the eigenvectors of the reduced jacobian **H**. If $\mathbf{y_Z} \in \mathbf{R}^{l_Z \times l_Z}$ contains the l_Z eigenvectors of **H** then the eigenvectors of the full-sized problem a given simply by $\mathbf{y}=\mathbf{Z}\ \mathbf{y_Z}$. The eigenvector corresponding to the y-velocity component is shown in Figure 3.



(a) (b)

Figure 1: Typical stream functions of stationary flows (a) stable flow; Re=41, (b) unstable flow; Re=157.

These reconstructed eigenvectors correspond to the critical perturbation that leads the solution to transition to time-periodic states in two dimensions. In the case of stand-alone CFD codes, the stationary solution perturbed with the reconstructed eigenvector can be used to initialize the iterations so that the periodic state may be reached.

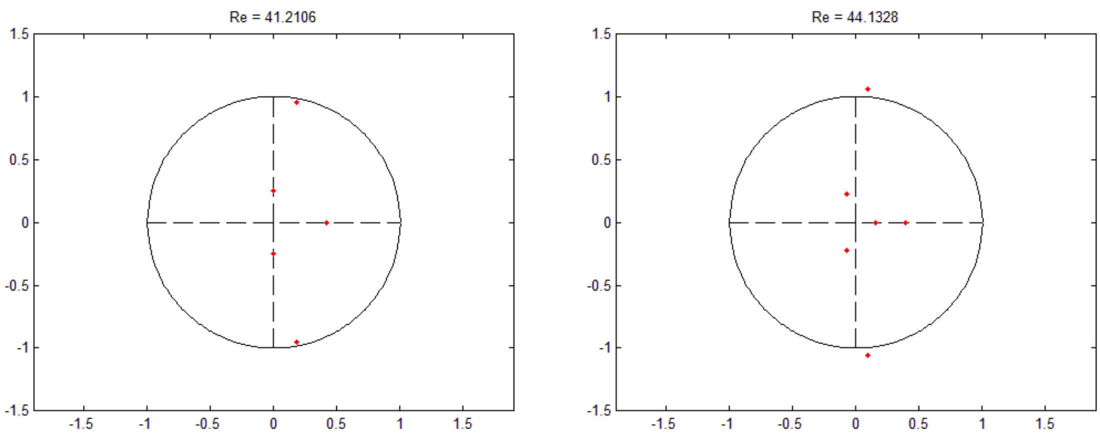


Figure 2: Spectrum of the RPM-derived matrix **H** at Re = 41.2106 (just before the Hopf point) and Re = 44.1328 (just past the Hopf point).

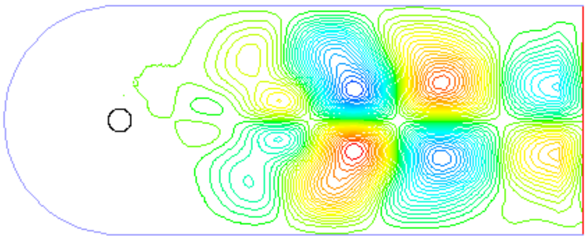


Figure 3: Reconstructed eigenvector of **H** at the Hopf point (y-velocity component); this is the critical disturbance that leads to periodic states.

3. 2 Periodic States

Periodic states with the stand-alone Fluent code can be approximately defined with the help of phase portraits that can provide a very rough estimate of the period at a particular parameter value. This is useful as a first step for the application of the proposed computational module. It is easier to start with a point further away from the Hopf bifurcation, here at Re=113 and move-in toward it.
A typical phase portrait for the solution at his parameter value, shown in Figure 4, is formed by plotting the y-velocity component, v_y, at a random point in the geometry, v_2, against its value at another one, v_1, at each time step. The inset is a blow up of the starting point and the ending point of the periodic oscillation that coincide forming a limit cycle.

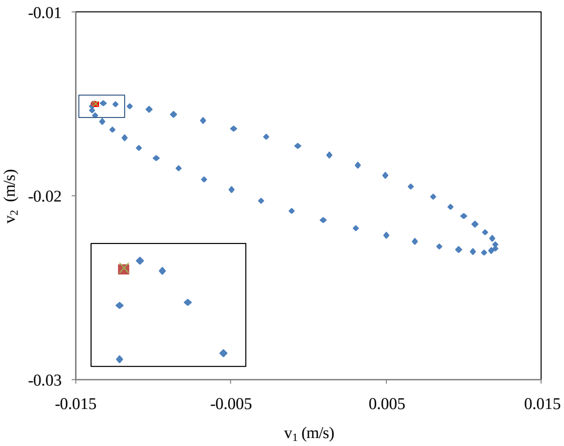


Figure 4: Phase portrait, Re=113. The inset shows the starting and end points of the limit cycle.

The time-step set in Fluent has to be properly adjusted for the computations to be economical - in terms of computational time - without sacrificing the accuracy of the results. Here the time-step is set to 0.13, roughly 15 % of the period that was approximately computed in the initial step.
Solution multiplicity is shown clearly in Figure 5 where a value, v_1, of the y-velocity component in a random point in the discretization is plotted over Re. The branch of stationary solutions (cf. Figure 5, solid line) loses stability past the Hopf bifurcation at Re ≈ 44 (cf. Figure 5, dashed line). A branch of stable periodic solutions emerges at the Hopf. The black circles in Figure 5 represent the minimum and maximum values of v_1 in the time-span of one period. The stable periodic solution and the unstable stationary solution for Re=103 are shown in Figure 6.
In non-dimensional form the frequency of oscillations is given by the Strouhal number St = d f/U, f being the frequency. The typical Reynolds-Strouhal number relationship that characterises the flow around a cylinder is reproduced here with accuracy (Figure 7 vs. Figure 3 in Henderson 1997).

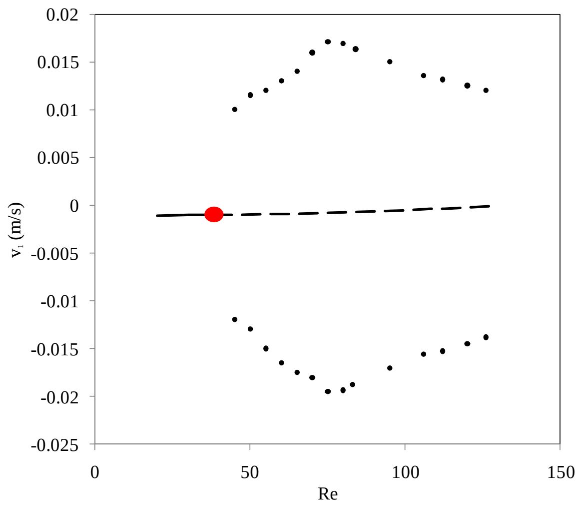


Figure 5: Multiple solution branches: Stable steady states (solid line), Unstable steady states (dashed line), minimum and maximum value of v1 (circles). Hopf bifurcation (red circle) at Re ≈ 44.

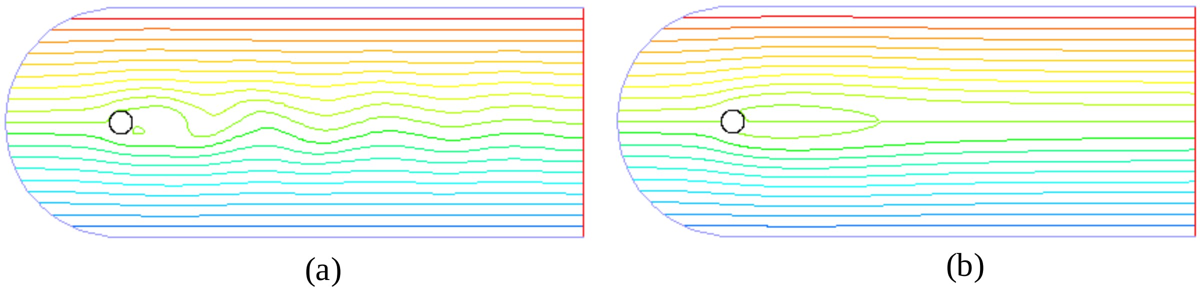


Figure 6: Streamlines of stable periodic solution (a) and unstable stationary solution (b) at Re=103.

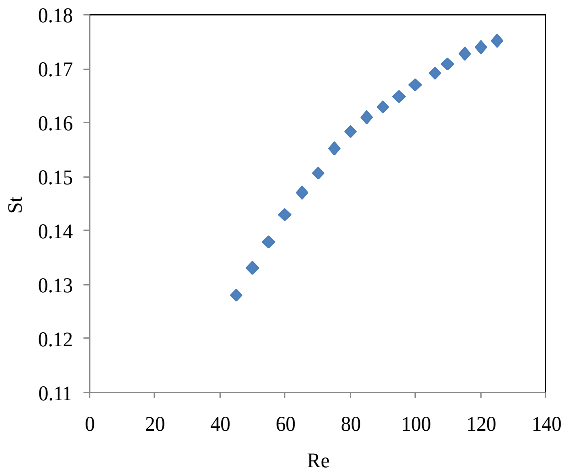


Figure 7: Evolution of the frequency of periodic oscillations: St vs Re.

4. CONCLUSIONS

The proposed computational module broadens the capabilities of commercial CFD software with minimal extra computational cost. Codes such as Fluent can be used for tracing efficiently entire solution branches even past critical parameter values where the states are unstable. Stability is determined by solving very small eigenvalue problems (typically O(10)) as a by-product of the method. Making nonlinear analysis available without having to resort to home-made codes is important for the understanding of complex physical phenomena. The existence of multiple states for a range of physical parameters is correlates to the different mechanisms that dominate each state. Therefore the end result of the process may present significant differences for the same parameter values.

REFERENCES

Cheimarios N., Koronaki E. D. and Boudouvis A. G. (2011),. Enabling a commercial computational fluid dynamics code to perform certain nonlinear analysis tasks., Comput. & Chem. Eng. 35, p. 2632.

Cheimarios N., Koronaki E. D. and Boudouvis A. G. (2012),. Illuminating nonlinear dependence of film deposition rate in a CVD reactor on operating conditions., Chem. Eng. J. 181-182, p. 516.

Henderson R. (1997),. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition., J. Fluid Mech. 352, p. 65.

Jackson C. P. (1987),. A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies., J. Fluid Mech. 182, p. 23.

Koronaki E. D., Boudouvis A.G., Kevrekidis I.G. (2003),.Enabling stability analysis of tubular reactor models using PDE/PDAE integrators., Comp.& Chem. Eng. 27, p. 951.

Kushnir R., Segal V., Ullmann A., Brauner N. (2014) ,. Inclined two-layered stratified channel flows: Long wave stability analysis of multiple solution regions ., Int. J. Mult. Flow 62 , p. 17.

Lust K., Roose D., Spense A. and Champneys A. (1998),.An adaptive Newton-Picard algorithm with subspace iteration for computing periodic solutions., J. Sci. Comput. 18, p. 1188.

Mathis C., Provansal M., Boyer L. (1987), .Bénard-von Kármán instability: Transient and forced regimes., J. Fluid Mech. 182, p. 1.

Shroff G., Keller H.B. (1993),.Stabilization of unstable procedures – the recursive projection method., SIAM J. Numer. Anal. 30, p. 1099.

Thompson M., Hourigan K., Sheridan J. (1996),.Three-dimensional instabilities in the wake of a circular cylinder., Exp. Therm. Fluid Sci. 12, p. 190.

Van Santen H., Kleijn C.R., Van Der Akker H.E.A (2001),.On multiple stability of mixed-convection flows in a chemical vapor deposition reactor., Int J. Heat Mass Tranf. 44, p. 659.

www.ansys.com, FLUENT, 2014.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΟΥ ΥΓΡΟΥ ΜΕΤΑΛΛΟΥ ΣΤΟ CPS ΚΑΙ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΤΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΠΟΡΟ

Ελευθέριος Μπένος[1,α], Νικόλαος Πελεκάσης[2,α]
[1]Υποψήφιος Διδάκτωρ, [2]Καθηγητής
[α]Εργαστήριο Ρευστομηχανικής & Στροβιλομηχανών,
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας,
Πεδίον Άρεως, 38334, Βόλος
E-mails: [1]ebenos@uth.gr, [2]pel@mie.uth.gr

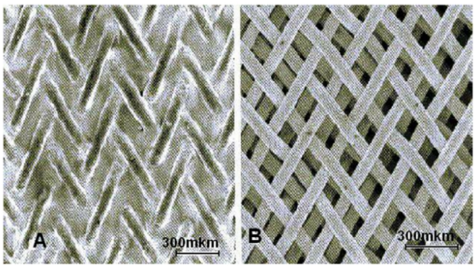
ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Στην παρούσα έρευνα μελετάται το CPS (Capillary Porous System). Πρόκειται για μία διάταξη που στηρίζεται σε τριχοειδή φαινόμενα για την παροχή υγρού μετάλλου και την ανατροφοδότηση της ποσότητάς του που είναι σε επαφή με το περιβάλλον πλάσμα. Η παραπάνω διαμόρφωση ροής μελετάται ως εναλλακτική λύση για την απαγωγή των τεράστιων ποσών θερμότητας που παράγονται κατά την αντίδραση σύντηξης και την προφύλαξη των τοιχωμάτων του αντιδραστήρα. Συγκεκριμένα, μελετάται η στατική διαμόρφωση του υγρού μετάλλου με την παρουσία ή όχι ηλεκτρικού πεδίου. Το υγρό μέταλλο παρέχεται από μία δεξαμενή που παραμένει σε μεγαλύτερη πίεση απ` ότι το εξωτερικό ρευστό. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται ώστε να αποκομιστεί το μέγεθος και το σχήμα της «σταγόνας» που διαμορφώνεται πάνω στο CPS συναρτήσει της πτώσης πίεσης. Κατόπιν, εισάγοντας τις ηλεκτρικές τάσεις στην διεπιφάνεια μελετάται το σχήμα της ως συνάρτηση της προαναφερθείσας βαθμίδας πίεσης, του εξωτερικά επιβαλλόμενου ηλεκτρικού πεδίου και του λόγου των διηλεκτρικών σταθερών. Στη συνέχεια, γίνεται μια εκτίμηση της απαγωγής της προσπίπτουσας θερμότητας, συνυπολογίζοντας την αγωγή της θερμότητας μέσα στο CPS και τη «σταγόνα», την συναγωγή μέσω της ροής του υγρού μετάλλου μέσα στο πορώδες υπόστρωμα καθώς και την λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισής του. Με βάση τα αποτελέσματα, μεγάλη ποσότητα αερίου λιθίου αναμένεται στην περιοχή του Scrape Off Layer με την οποία θα είναι σε επαφή, μολύνοντας έτσι το πλάσμα. Τέλος, μελετάται η ροή του υγρού μετάλλου μέσα από ένα πόρο και αποκομίζονται χρήσιμα συμπεράσματα όσο αναφορά την αλληλεπίδραση των κυρίαρχων δυνάμεων που καθορίζουν την ροή.

Λέξεις Κλειδιά: PFC, CPS, διεπιφάνεια, απαγωγή θερμότητας, τριχοειδή φαινόμενα

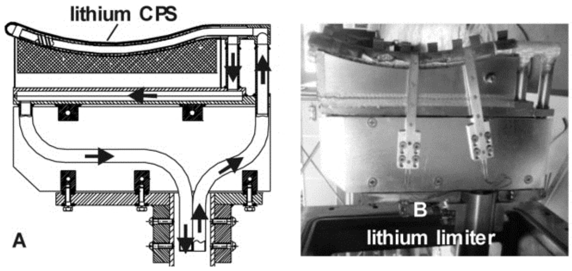
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ
Στα πλαίσια του προγράμματος της ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης, ως καίριο ζήτημα αναδεικνύεται η τεχνολογία που σχετίζεται με την αλληλεπίδραση του πλάσματος και των τοιχωμάτων του αντιδραστήρα. Σε μεγάλες διατάξεις τα τοιχώματα αυτά θα υπόκεινται σε τεράστια θερμικά φορτία, κυρίως κατά την διάρκεια μεταβατικών ασταθειών του πλάσματος. Έτσι, τα τοιχώματα εμφανίζουν προβλήματα που σχετίζονται με την διάβρωση, τις θερμικές τάσεις κ.α. Γι` αυτούς τους λόγους μια διαφορετική προσέγγιση έχει προταθεί και εφαρμόζεται πειραματικά και είναι η αντικατάσταση των στερεών στοιχείων που αντιμετωπίζουν το πλάσμα από υγρά μέταλλα, Christofilos (1989), με επικρατέστερο το λίθιο (Li). Τα υγρά μέταλλα παρέχουν, εκτός από την εξάλειψη των προαναφερθέντων ζητημάτων, την βελτιστοποίηση της απαγωγής θερμότητας από τα τοιχώματα. Τέλος, εφαρμόζονται σε μορφή: α) τζετ, Gomez et al. (2011), β) σταγόνων, Pelekasis et al. (2014), γ) υγρού υμένα, Ying et al. (2000) και δ) μέσω μιας διάταξης που στηρίζεται σε τριχοειδή φαινόμενα (Capillary Porous System - CPS), Golubchikov et al. (1996).

Εφόσον οι θερμοκρασίες κατά την λειτουργία του αντιδραστήρα είναι υψηλότερες από το σημείο τήξης του λιθίου (180.54^{o}C), αυτό θα είναι σε υγρή κατάσταση. Έτσι, το λίθιο αντιμετωπίζει κάποια τεχνολογικά προβλήματα που σχετίζονται κυρίως με τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις κατά την διάρκεια των μαγνητοϋδροδυναμικών ασταθειών. Η χρησιμοποίηση του λιθίου ως ένα υλικό με χαμηλό ατομικό αριθμό, έχει πολλά πλεονεκτήματα έναντι υλικών όπως ο άνθρακας (C), το βηρύλλιο (Be) και το βολφράμιο (W). Η συμβατότητά του με το πλάσμα είναι το κυριότερο, όπως έχει διαπιστωθεί και σε αρκετά πειράματα.

Η πρόταση της χρησιμοποίησης της επιφανειακής τάσης με σκοπό την ευστάθεια του υγρού μετάλλου βασίστηκε στην ιδέα της αντιστάθμισης των δυνάμεων Lorentz από δυνάμεις λόγω επιφανειακής τάσης μέσα σε τριχοειδή κανάλια, Golubchikov et al (1996). Τα τριχοειδή αυτά κανάλια από μολυβδαίνιο (Mo), ανοξείδωτο ατσάλι (SS), βανάδιο (V) ή βολφράμιο (W) κατασκευάζονται από πεπιεσμένα σύρματα σε μορφή πλέγματος και είναι γνωστά ως CPS, σχήμα 1. Έτσι, το CPS βασίζεται στην ψύξη του αντιδραστήρα κυρίως μέσω της λανθάνουσας θερμότητας εξάτμισης του υγρού μετάλλου. Η χρησιμοποίηση του υγρού μετάλλου οφείλεται στην υψηλή θερμοχωρητικότητα που το χαρακτηρίζει καθιστώντας το αποτελεσματικό στην απαγωγή θερμότητας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα CPS είναι αυτό το οποίο χρησιμοποιείται στο FTU tokamak (ENEA, Frascati), σχήμα 2.



Σχήμα 1. CPS από πλέγματα Mo A) με Li και B) χωρίς Li, Mirnov et al. (2006)



Σχήμα 2. Το CPS στο FTU tokamak: A) σχηματική αναπαράσταση με ανακυκλοφορία νερού, B) πραγματική εικόνα, Vertkov et al. (2014)

2. ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΟΥ ΥΓΡΟΥ ΜΕΤΑΛΛΟΥ ΣΤΟ CPS

2.1 Μοντελοποίηση του προβλήματος και υπολογιστική επίλυση

Αρχικά, εξετάζεται η στατική διαμόρφωση του υγρού μετάλλου πάνω στην πορώδη διάταξη όντας σε επαφή με το πλάσμα, σχήμα 3. Το υγρό μέταλλο παρέχεται από μία δεξαμενή που παραμένει σε μεγαλύτερη πίεση απ` ότι το εξωτερικό ρευστό. Εκτός της βαθμίδας της πίεσης, οι δυνάμεις λόγω τριχοειδών φαινομένων συνεισφέρουν στην αναρρίχηση του ρευστού μέσω του πόρου. Το υγρό μέταλλο «κάθεται» στο πάνω μέρος της πορώδους διάταξης, η οποία τοποθετείται στο εσωτερικό ενός αντιδραστήρα. Σαν μία πρώτη προσπάθεια κατανόησης των φαινομένων που υπεισέρχονται υποθέτουμε τον αντιδραστήρα ως ένα ηλεκτρικό πυκνωτή που δημιουργεί ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, $\mathbf{E}=d\Phi_{out}/dz\mathbf{e_z}=a\mathbf{e_z}$, α>0. Το φαινόμενο καθορίζεται από το κάθετο ισοζύγιο τάσεων πάνω στην διεπιφάνεια:

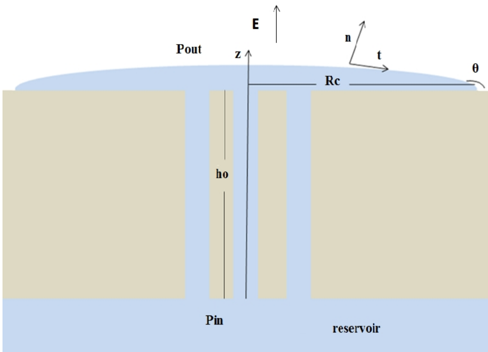
$$\mathbf{n}\left(P_{in}-P_{out}\right)\underline{\underline{I}}+\mathbf{n}\left(\underline{\underline{\tau_e^{in}}}-\underline{\underline{\tau_e^{out}}}\right)+\mathbf{n}2H\sigma=0 \quad (1)$$

όπου, Φ_{out} είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο περιβάλλων ρευστό, a η κλίση του ηλεκτρικού δυναμικού, **E** η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, P_{in}- P_{out} η βαθμίδα της πίεσης, H η μέση καμπυλότητα, $\underline{\underline{\tau_e^{in}}}$, $\underline{\underline{\tau_e^{out}}}$ οι ηλεκτρικές τάσεις στο υγρό μέταλλο και στο πλάσμα, αντίστοιχα:

$$\underline{\underline{\tau_e^k}} = \varepsilon_k \left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{i,j} E_j E_j \right)\Bigg|_k \text{, k=in, out} \tag{2}$$

σ η επιφανειακή τάση και $\underline{\underline{I}}$ ο μοναδιαίος τελεστής. Τέλος, **n** είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην διεπιφάνεια:

$$\mathbf{n} = \frac{-z_r \mathbf{e_r} + \mathbf{e_z}}{\sqrt{1+z_r^2}} \tag{3}$$



Σχήμα 3. Σχηματική αναπαράσταση της στατικής διαμόρφωσης του υγρού μετάλλου

Για μία πολύ λεπτή «σταγόνα» υγρού μετάλλου που σχηματίζεται πάνω στην διάταξη, z_r<<1, οι μεταβολές του ηλεκτρικού δυναμικού στην διεπιφάνεια ορίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \approx \frac{d\Phi}{dz}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} \approx \frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{ds} \tag{4}$$

όπου $ds=\sqrt{1+z_r^2}\,dr$.

Για συγκρίσιμα μήκη πλάτους και ύψους της «σταγόνας» πρέπει να εφαρμοστεί η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων ώστε να υπολογιστεί το ηλεκτρικό δυναμικό μέσα και έξω από το υγρό μέταλλο. Η συγκεκριμένη μελέτη είναι στα άμεσα μελλοντικά σχέδια των συγγραφέων.

Στην παρούσα εργασία, θεωρώντας το υγρό μέταλλο και το περιβάλλων ρευστό ως τέλεια διηλεκτρικά αποκομίζονται δύο σχέσεις για την διεπιφάνεια των δύο ρευστών. Κάθετα στην διεπιφάνεια οι ηλεκτρικές μετατοπίσεις είναι ίσες:

$$D_{in}\big|_n = D_{out}\big|_n \Rightarrow \varepsilon_{in} E_{in}\big|_n = \varepsilon_{out} E_{out}\big|_n \Rightarrow -\varepsilon_{in}\frac{d\Phi_{in}}{dn} = -\varepsilon_{out}\frac{d\Phi_{out}}{dn} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_{in}}{dn} = \frac{\varepsilon_{out}}{\varepsilon_{in}}\frac{d\Phi_{out}}{dn} = \frac{\varepsilon_{out}}{\varepsilon_{in}}\nabla\Phi_{out}\cdot\mathbf{n} = \frac{a}{\sqrt{1+z_r^2}} \tag{5}$$

Εφαπτομενικά στην διεπιφάνεια οι ηλεκτρικές εντάσεις του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσες:

$$E_{in}\big|_t = E_{out}\big|_t \Rightarrow \frac{d\Phi_{in}}{ds} = \frac{d\Phi_{out}}{ds} = \nabla\Phi_{out}\cdot\mathbf{t} = \frac{az_r}{\sqrt{1+z_r^2}} \tag{6}$$

Όπου **t** είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι εφαπτομενικό στην διεπιφάνεια:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{e_r} + z_r\mathbf{e_z}}{\sqrt{1+z_r^2}} \tag{7}$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και θεωρώντας αξονική συμμετρία και γνωστή γωνία επαφής λύνεται η εξίσωση Young-Laplace για την διεπιφάνεια (εξίσωση 1).

Επίσης, για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιείται το ολοκληρωτικό ισοζύγιο της «σταγόνας» που διαμορφώνεται πάνω στην πορώδη διάταξη:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R_c}\left(P_0-\rho g h_0-P_{out}\right) r dr d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{R_c} \rho g z r dr d\theta - 2\pi\sigma R_c \sin\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{R_c}\left(\underline{\underline{\tau_e^{in}}}-\underline{\underline{\tau_e^{out}}}\right) r dr d\theta = 0 \qquad (8)$$

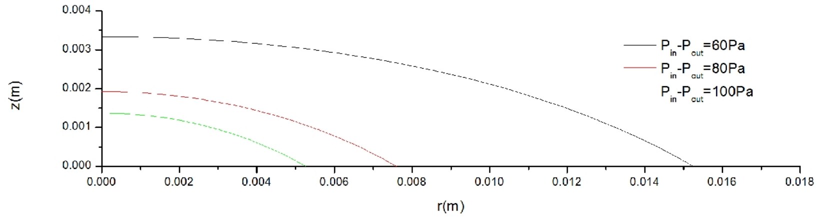
όπου P_0, P_{out} οι πιέσεις στη δεξαμενή και στο πλάσμα, αντίστοιχα, ρ η πυκνότητα του υγρού μετάλλου, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, h_0 το ύψος του πόρου, θ η γωνία επαφής και R_c το μήκος της «σταγόνας» στον οριζόντιο άξονα.

Οι συνοριακές συνθήκες επιτάσσουν:

$$\left.\frac{dz}{dr}\right|_{r=0} = 0, \quad \left.\frac{dz}{dr}\right|_{r=Rc} = \tan\theta \qquad (9)$$

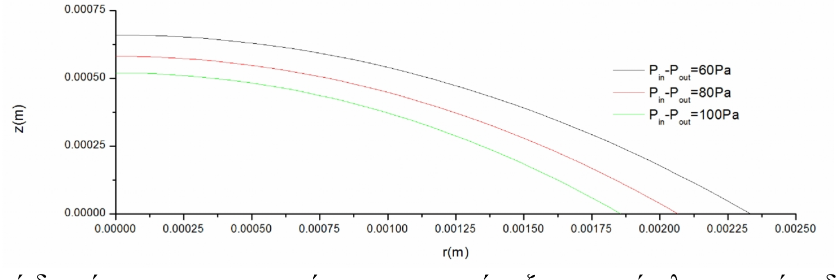
2.3 Αποτελέσματα και συμπεράσματα

Αρχικά, χωρίς την εφαρμογή του ηλεκτρικού πεδίου, αποκομίζονται το μέγεθος και το σχήμα της «σταγόνας» που διαμορφώνεται πάνω στην πορώδη διάταξη. Έτσι, μεταβάλλοντας τη βαθμίδα της πίεσης παρατηρείται ότι όταν αυτή αυξάνεται, το μέγεθος της «σταγόνας» μειώνεται, σχήμα 5. Επειδή το πρόβλημα που μελετάται είναι αξονοσυμμετρικό, έχει επιλεχθεί στα σχήματα μόνο το μισό της κάθετης τομής με τη «σταγόνα». Σε όλες τις παρακάτω περιπτώσεις επιλέχθηκε το λίθιο ως υγρό μέταλλο, με τις φυσικές του ιδιότητες να αναφέρονται στο Golubchikov et al. (1996). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε ότι στους 200 ^{o}C ρ=536.4 Kg/m^3 και σ=0.3686 N/m, g=9.81 m/s^2 και h_0=5·10^{-3} m.

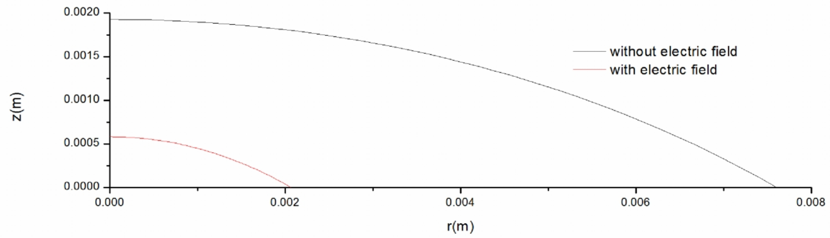


Σχήμα 5. Στατική διαμόρφωση της «σταγόνας» χωρίς την επιβολή εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου για διάφορες βαθμίδες της πίεσης

Όταν εφαρμόζεται ηλεκτρικό πεδίο έντασης a=0.13 V/m (Pelekasis et al. (2014)), και $\varepsilon_{out}/\varepsilon_{in}$= 30 τότε παρατηρείται η ίδια συμπεριφορά όσο αναφορά το μέγεθος της σταγόνας συναρτήσει της βαθμίδας πίεσης, όπως και για a=0 V/m, σχήμα 6, με την διαφορά ότι το μέγεθος της σταγόνας είναι εμφανώς μικρότερο, κάτι που φαίνεται καλύτερα στο σχήμα 7, όπου επιλέχθηκε μια ενδεικτική βαθμίδα πίεσης 80 Pa.

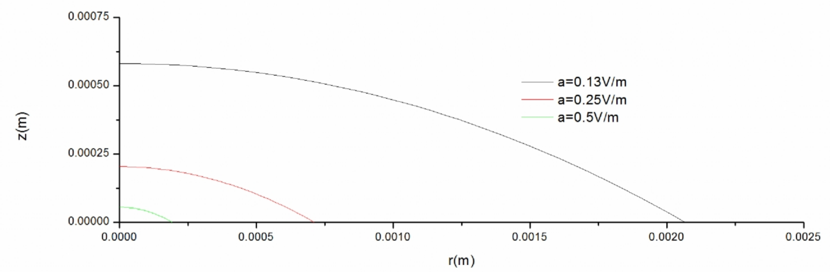


Σχήμα 6. Στατική διαμόρφωση της «σταγόνας», παρουσία εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου a=0.13 V/m και $\varepsilon_{out}/\varepsilon_{in}$= 30, για διάφορες βαθμίδες της πίεσης



Σχήμα 7. Στατική διαμόρφωση της «σταγόνας», παρουσία και όχι εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, για Δp=80 Pa, a=0.13 V/m και $\varepsilon_{out}/\varepsilon_{in}$= 30

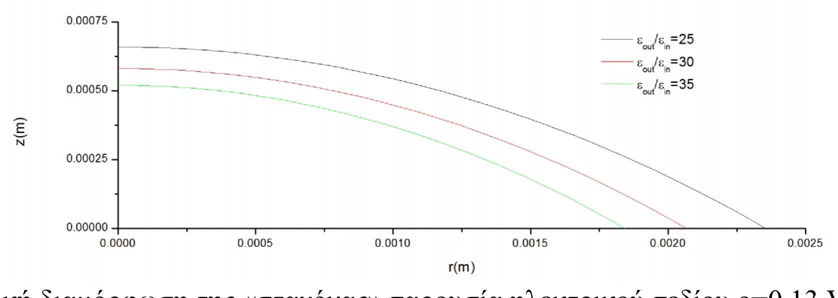
Στη συνέχεια, διατηρώντας την βαθμίδα της πίεσης και τον λόγο $\varepsilon_{out}/\varepsilon_{in}$ σταθερά και ίσα με 80 Pa και 30, αντίστοιχα, λαμβάνονται στο σχήμα και το μέγεθος της «σταγόνας» για διάφορα ηλεκτρικά πεδία, σχήμα 8. Παρατηρείται ότι το μέγεθος της «σταγόνας» μειώνεται αυξάνοντας το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή το a.



Σχήμα 8. Στατική διαμόρφωση της «σταγόνας» παρουσία ηλεκτρικού πεδίου για Δp=80Pa, $\varepsilon_{out}/\varepsilon_{in}$=30 και για διάφορα μέτρα του ηλεκτρικού πεδίου

Τέλος, διατηρώντας σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, a=0.13 V/m, και σταθερή βαθμίδα της πίεσης, Δp=80 Pa, παρατηρείται ότι το μέγεθος της «σταγόνας» μειώνεται αυξάνοντας τον λόγο των δύο διηλεκτρικών σταθερών $\varepsilon_{out}/\varepsilon_{in}$, σχήμα 9.

Συνοψίζοντας, η αύξηση της βαθμίδας της πίεσης, του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου και του λόγου $\varepsilon_{out}/\varepsilon_{in}$ συνεισφέρουν στην μείωση του μεγέθους της «σταγόνας» που διαμορφώνεται πάνω στην πορώδη διάταξη. Επιπλέον, οι ηλεκτρικές τάσεις στην διεπιφάνεια οδηγούν σε μείωση του μεγέθους της «σταγόνας», με το σχήμα της σε όλες τις περιπτώσεις να παραμένει παρόμοιο. Τέλος, το μέγεθος των πόρων και η πυκνότητά τους δεν επηρεάζουν την στατική διαμόρφωση του υγρού μετάλλου. Το μέγεθος των πόρων και η πυκνότητά τους θα καθορίζουν την δυναμική συμπεριφορά, την εύρεση της ταχύτητας με την οποία θα βγει το υγρό μέταλλο έξω από τον πόρο και ίσως εμποδίσουν την επίτευξη της στατικής διαμόρφωσης.



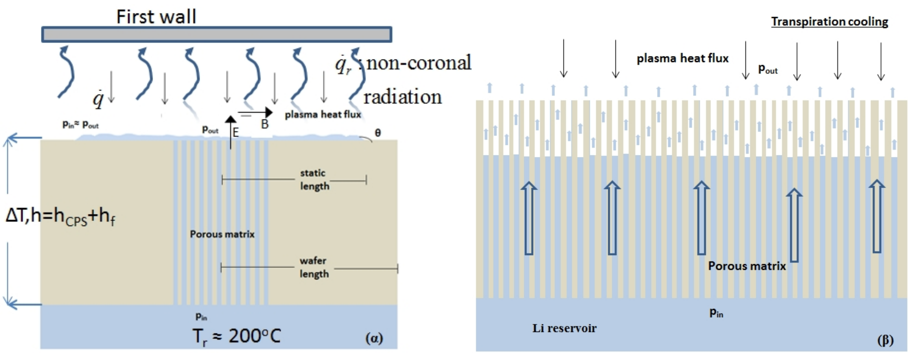
Σχήμα 9. Στατική διαμόρφωση της «σταγόνας» παρουσία ηλεκτρικού πεδίου a=0.13 V/m για Δp=80 Pa και για διάφορες τιμές του λόγου των δύο διηλεκτρικών σταθερών $\varepsilon_{out}/\varepsilon_{in}$

2.2 Μελέτη της μεταφοράς θερμότητας

Στην στατική διαμόρφωση του υγρού μετάλλου δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας με συναγωγή. Έτσι, καταστρώνεται αρχικό ισοζύγιο για δεδομένο προσπίπτον ποσό θερμότητας $\dot{q}''$ (W/m^2), αφαιρώντας το ποσό που ακτινοβολείται στα τοιχώματα του αντιδραστήρα (non-coronal radiation shielding) και αγνοώντας αρχικά το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Έτσι, η απαγωγή της θερμότητας γίνεται μόνο μέσω της λανθάνουσας θερμότητας εξάτμισης και τη μεταφορά θερμότητας με αγωγή στη «σταγόνα» και στο CPS:

$$\dot{q}'' = k\frac{T_{out} - T_r}{h} + L\rho u \tag{10}$$

όπου $\dot{q}''$ η θερμοροή, k η θερμική αγωγιμότητα, T_r, T_{out} η θερμοκρασία του λιθίου στην δεξαμενή και αυτή έξω από το CPS, αντίστοιχα, h το άθροισμα του ύψους του CPS και του πάχους της «σταγόνας» που σχηματίζεται πάνω στο στερεό υπόστρωμα, L η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης του λιθίου, ρ η πυκνότητα του λιθίου και u η ταχύτητά του. Ως θερμοκρασία της διεπιφάνειας λιθίου-πλάσματος θεωρείται αυτή που είναι σε ισορροπία με την εξωτερική πίεση. Η τελευταία είναι περίπου αυτή του κενού και με βάση την σχέση θερμοκρασίας/τάσης ατμών του λιθίου προκύπτει μία θερμοκρασία περίπου 500^o C. Η παραπάνω σχέση (10) δίνει μια εκτίμηση του ρυθμού εξάτμισης, $\dot{m}'' = \rho\dot{u}$, του λιθίου. Το ζητούμενο είναι να επιτευχθεί σχεδιασμός του CPS ο οποίος θα διατηρεί τον εν λόγω ρυθμό κάτω από ένα κατώφλι πέραν του οποίου υπάρχει κίνδυνος αναντίστρεπτης μόλυνσης του πλάσματος στον πυρήνα του αντιδραστήρα. Στο σχήμα 4α φαίνεται ένα απλοποιημένο μοντέλο του θερμικού προβλήματος.



Σχήμα 4. Απλοποιημένο μοντέλο του θερμικού προβλήματος υποθέτοντας α) στατική διαμόρφωση και β) transpiration cooling

Το παραπάνω ισοζύγιο θεωρεί στατική λειτουργία της διάταξης. Όμως, και για αρκετά υψηλές θερμοροές το στρώμα υγρού λιθίου στην κορυφή της διάταξης θα αναλωθεί γρήγορα και θα ακολουθήσει εξάτμιση του λιθίου που περιέχεται μέσα στο CPS. Στην περίπτωση αυτή όμως λόγω των τριχοειδών δυνάμεων θα υπάρχει μεταφορά του λιθίου από το reservoir (αποθήκη) προς την διεπιφάνεια με το πλάσμα. Λαμβάνοντας υπόψη και την συναγωγή της θερμότητας μέσω της ροής του λιθίου στους πόρους, σχήμα 4β, το ισοζύγιο της ενέργειας που διέπει το πρόβλημα είναι το ακόλουθο:

$$\dot{q}'' + \dot{q}''_{in} = \dot{q}''_{out} \Rightarrow \dot{q}'' + \rho C_p uT\Big|_{x=H} - k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=H} = \rho C_p uT\Big|_g \Rightarrow \dot{q} - k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=H} = L\rho u, \tag{11}$$

όπου $L \equiv c_p T\big|_g - c_p T\big|_l$. Επίσης,

$$\left[\rho C_p uT - k\frac{\partial T}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=0} = \left[\rho C_p uT - k\frac{\partial T}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=H} = \rho C_p uT\Big|_{x=H} - \dot{q} + L\rho u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{q} = L\rho u + \rho C_p u\left(T_H - T_0\right) + k\frac{\partial T}{\partial x}\Bigg|_{x=0} \tag{12}$$

Από την εξίσωση 12 φαίνεται ότι η απαγωγή της θερμότητας γίνεται από την εξάτμιση (πρώτος όρος), τη συναγωγή ή προθέρμανση του λιθίου μέσα στην πορώδη διάταξη (δεύτερος όρος) και την αγωγή (τρίτος όρος). Θεωρώντας μονοδιάστατη μεταφορά διά αγωγής και συναγωγής μέσα στην πορώδη διάταξη, ο όρος της αγωγής είναι γνωστός από την αναλυτική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης συναγωγής-διάχυσης. Επομένως, η εξίσωση 12 γίνεται:

$$\dot{q} = L\rho u + \rho C_p u \left(T_H - T_0\right)\left(1 + \frac{1}{e^{\rho C_p u H / k}}\right) \tag{13}$$

όπου $T_H - T_0$ η διαφορά θερμοκρασίας κατά μήκος της ανάπτυξης του υγρού λιθίου μέσα στο CPS, C_p η θερμοχωρητικότητα και Η το ύψος υγρού λιθίου μέσα στο CPS. Τέλος, οι δείκτες l, g αναφέρονται στην υγρή και στην αέρια κατάσταση του λιθίου, αντίστοιχα.

Η ταχύτητα του ρευστού μέσα στο CPS λαμβάνεται από τον νόμο του Darcy, που αποτελεί μακροσκοπικό στατιστικό ισοδύναμο των εξισώσεων Navier-Stokes και δίνουν μια προσέγγιση της ταχύτητας:

$$u = \varphi_p \frac{\frac{2\sigma}{R} + \Delta p - \rho g H}{\mu H} k_p \tag{14}$$

όπου φ_p το πορώδες του CPS, μ, ρ το δυναμικό ιξώδες και η πυκνότητα του λιθίου, k_p η φυσική διαπερατότητα, σ η επιφανειακή τάση, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και R η ακτίνα του πόρου.

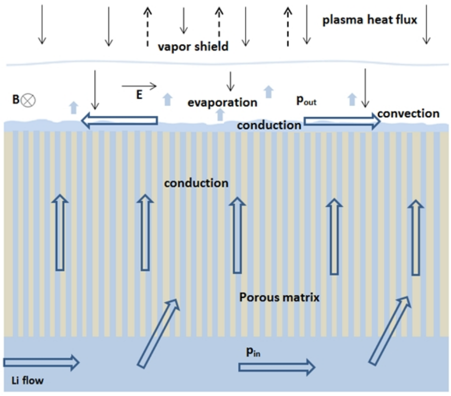
Όσο αναφορά το θερμικό πρόβλημα, μέσω της εξίσωσης 14, υποθέτοντας ότι T_{out}=500^{o}C, T_r=200^{o}C και παίρνοντας τις τιμές των φυσικών ιδιοτήτων λιθίου από τους (Golubchikov et al. (1996)) βρίσκεται η ογκομετρική παροχή του λιθίου μέσα στο πορώδες συναρτήσει του ύψους Η που καταλαμβάνει το υγρό λίθιο μέσα στο CPS. Με βάση τα παραπάνω, το ισοζύγιο (εξ. 13) παρέχει την θερμοροή που απάγεται με τον παραπάνω μηχανισμό σαν συνάρτηση του ύψους Η του υγρού λιθίου. Αυξανομένης της θερμοροής από το πλάσμα αυξάνει συνεχώς η ογκομετρική παροχή του ρευστού που απαιτείται για την απαγωγή της θερμότητας και επομένως μειώνεται το ύψος που καταλαμβάνει το υγρό λίθιο μέσα στην πορώδη διάταξη ενώ αυξάνει η μαζική παροχή εξατμιζόμενου λιθίου. εξάτμισης. Με τον τρόπο αυτό το μεγαλύτερο ποσοστό της θερμότητας, 94.4%, απορροφάται μέσω της εξάτμισης του λιθίου, ενώ μέσω συναγωγής 5.6%, ενώ με την στατική διαμόρφωση που περιγράφει το ισοζύγιο (εξ. 10) η θερμότητα απάγεται σχεδόν αποκλειστικά μέσω εξάτμισης καθώς η αγωγή είναι αμελητέα. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, στην περίπτωση αυτή αναμένεται γρήγορη ανάλωση του εξωτερικού υγρού λιθίου, ενώ για πολύ υψηλές θερμοροές θα υπάρχει κατανάλωση και του λιθίου στο CPS με κίνδυνο εμπλοκής του λιθίου στο reservoir.

Και στις δύο προαναφερθείσες περιπτώσεις, η ογκομετρική παροχή αναμένεται μη ρεαλιστική και αρκετά μεγαλύτερη από τις επιτρεπτές τιμές και τα μεγάλα ποσά θερμότητας που πρέπει να απάγονται μέσω εξάτμισης θα οδηγήσουν σε τεράστια συγκέντρωση αερίου λιθίου στην περιοχή SOL (Scrape Of Layer), κάτι το οποίο δεν είναι επιθυμητό αφού μολύνεται το πλάσμα. Ως SOL ορίζεται η περιοχή του πλάσματος που χαρακτηρίζεται από ανοιχτές δυναμικές γραμμές, οι οποίες ξεκινούν ή τελειώνουν σε μια μεταλλική επιφάνεια. Στην περιοχή του εκτροπέα (divertor), η SOL, η οποία βρίσκεται έξω από το separatrix, απορροφά το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας και των σωματιδίων από το πλάσμα μεταφέροντάς τα μέσω των δυναμικών γραμμών στις πλάκες του εκτροπέα (divertor plates). Συνεπώς, αυτή η περιοχή είναι πολύ σημαντική για τους μελλοντικούς αντιδραστήρες ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης.

3. ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΤΟΥ ΥΓΡΟΥ ΜΕΤΑΛΛΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΈΝΑ ΠΟΡΟ

3.1 Μοντελοποίηση του προβλήματος και υπολογιστική επίλυση

Όπως φάνηκε από την μελέτη της μεταφοράς θερμότητας, καμία από τις δύο θεωρήσεις δεν αποδίδει ρεαλιστικά αποτελέσματα, αφού οδηγούν σε μόλυνση του πλάσματος λόγω του αέριου λιθίου. Χρειάζεται, επομένως, μία άλλη διάταξη, όπου η συναγωγή θα συνεισφέρει περισσότερο στην απαγωγή θερμότητας. Στη διάταξη που προτείνεται, σχήμα 10, λαμβάνονται υπόψη φαινόμενα συναγωγής της θερμότητας μέσα στην πορώδη διάταξη καθώς και στον υγρό υμένα που σχηματίζεται πάνω στην διάταξη.



Σχήμα 10. Σχηματική αναπαράσταση της ροής μέσα στο CPS, συμπεριλαμβανομένου και του υγρού υμένα

Ως πρώτο βήμα, μελετάται υπολογιστικά, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η ροή μέσα σε ένα πόρο έτσι ώστε να επιτευχθεί μια πρώτη εκτίμηση σχετικά με την αλληλεπίδραση των διαφορετικών δυνάμεων που λαμβάνουν μέρος. Έτσι, αγνοώντας τις αδρανειακές δυνάμεις, λαμβάνεται ένα άνω όριο της ταχύτητας με την οποία το υγρό μέταλλο εξέρχεται από το πορώδες. Οι διέπουσες αδιάστατες εξισώσεις είναι:

Το ισοζύγιο ορμών:

$$-\nabla p + We\nabla \cdot \underline{\underline{\tau_v}} - Bo\mathbf{e_z} + Bo_M\left(-\nabla\Phi_{in} + \mathbf{u}\times\mathbf{B_0}\right)\times\mathbf{B_0} = 0 \tag{15}$$

Η εξίσωση της συνέχειας:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_r\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{16}$$

Η διατήρηση του ηλεκτρικού δυναμικού:

$$\nabla^2\Phi_{in} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \tag{17}$$

Πάνω στην διεπιφάνεια ισχύει η κινηματική συνθήκη:

$$u_r\frac{\partial f}{\partial r} = u_z \tag{18}$$

ενώ το κάθετο ισοζύγιο τάσεων πάνω στην διεπιφάνεια διαμορφώνεται ως εξής:

$$\left(P - W\,\mathrm{e}\,\underline{\underline{\tau_v}}\right)\mathbf{n} + \mathbf{n}Bo_{El}\left(\underline{\underline{\tau_e^{in}}} - \underline{\underline{\tau_e^{out}}}\right) = -\left(\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial s} - \frac{\mathbf{n}}{R_2}\right) \tag{19}$$

Το υγρό μέταλλο και το περιβάλλων ρευστό θεωρούνται τέλεια διηλεκτρικά:

$$\frac{\partial\Phi_{in}}{\partial s} = \frac{\partial\Phi_{out}}{\partial s}, \quad \varepsilon_{in}\frac{\partial\Phi_{in}}{\partial n} = \varepsilon_{out}\frac{\partial\Phi_{out}}{\partial n} \tag{20}$$

Το ισοζύγιο μάζας θα δώσει την ογκομετρική παροχή:

$$\iint_{A_{in}}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dA_{in} = \iint_{A_{out}}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dA_{out}, \quad \dot{Q} = v_0\pi R_0^2 \tag{21}$$

όπου:

$$\underline{\underline{\tau_e^k}} = \varepsilon_k\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{i,j}E_iE_j\right)\Bigg|_k$$, με k=in, out

$$Bo=\frac{\rho g R_0^2}{\sigma},\ We=\frac{\mu\hat{u}}{\sigma},\ Bo_M=\frac{\lambda\hat{u}B_0^2R_0^2}{\sigma},\ \mathrm{Bo}_{El}=\frac{a^2R_0}{\sigma},\ \hat{u}=\frac{\sigma R_0}{\mu h_0},\ \underline{\underline{\tau_v}}=\nabla u+\nabla u^T,$$

$\underline{\underline{\tau_v}}$, $\underline{\underline{\tau_e}}$, οι ιξώδεις και οι ηλεκτρικές τάσεις, αντίστοιχα, Φ_{in} το ηλεκτρικό δυναμικό μέσα στο υγρό μέταλλο, u η ταχύτητα του υγρού μετάλλου, με u_θ, u_z, u_r οι συνιστώσες της u στην e_θ, e_z και e_r διεύθυνση, αντίστοιχα, B_0 το μέτρο του μαγνητικού πεδίου, $\dot{Q}$ η ογκομετρική παροχή και R_0 η ακτίνα του πόρου. Τέλος, τα μοναδιαία διανύσματα κάθετα και εφαπτομενικά στην διεπιφάνεια είναι:

$$\mathbf{n}=\frac{-f_r\mathbf{e_r}+\mathbf{e_z}}{\sqrt{1+f_r^2}},\ \mathbf{t}=\frac{\mathbf{e_r}+f_r\mathbf{e_z}}{\sqrt{1+f_r^2}} \tag{22}$$

και επίσης η ακτίνα καμπυλότητας $R_2=\dfrac{r\sqrt{1+f_r^2}}{-f_r}$.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων εκτιμάται η ταχύτητα στην έξοδο του πόρου. Χρησιμοποιώντας ένα ακτινικό μαγνητικό πεδίο οι διάφορες δυνάμεις που αλληλεπιδρούν είναι α) η διαφορά πίεσης κατά μήκος της πορώδους διάταξης, P_r-P_p, β) η τριχοειδής πίεση, 2σcosθ/R, γ) η ιξώδης απόσβεση, $\mu uh/R^2$, και δ) η μαγνητική απόσβεση, $hu\lambda B_0^2$. Για ακτίνα πόρου με R_0=15μm η πίεση λόγω τριχοειδών φαινομένων είναι αυτή που καθορίζει περισσότερο την ταχύτητα του λιθίου μέσα στον πόρο. Επιπλέον, μέσω του ισοζυγίου μεταξύ ιξώδους και μαγνητικής απόσβεσης, χρησιμοποιώντας B_0=2T βρίσκεται ένα άνω όριο της ταχύτητας με την οποία θα εξέλθει το υγρό μέταλλο από τον πόρο, u_0=0.6m/s.

Το υγρό μέταλλο που αναβλύζει από τους πόρους θα δώσει ένα υγρό υμένα ο οποίος θα ρέει πάνω στη διάταξη και θα υπόκειται σε ηλεκτρομαγνητικές και θερμοηλεκτρομαγνητικές (λόγω θερμοηλεκτρικού φαινομένου) δυνάμεις. Επομένως, ως επόμενο βήμα, εφόσον έχει βρεθεί η ταχύτητα με την οποία θα εξέλθει το υγρό μέταλλο από τον πόρο με μεγαλύτερη ακρίβεια, θα εξετασθεί η ροή του λεπτού υμένα που θα σχηματιστεί στο πάνω μέρος της πορώδους διάταξης. Έτσι, η στατική διαμόρφωση, που μελετήθηκε στην δεύτερη ενότητα, θα εμπλουτιστεί από τις αξονοσυμμετρικές εξισώσεις της κίνησης συμπληρωμένης της γνωστής ταχύτητας εκροής από τον πόρο, ως συνοριακή συνθήκη στην διεπιφάνεια υγρού υμένα-CPS. Η δυναμική συμπεριφορά πολύ πιθανόν να εμποδίσει την δημιουργία της στατικής διαμόρφωσης. Η δυναμική ανάλυση της ροής του υγρού υμένα, η ευστάθειά του καθώς και η ικανότητα της διάταξης να επάγει θερμότητα θα εξεταστεί μελλοντικά, συμπληρώνοντας τώρα και την συναγωγή, σε συνθήκες περιβάλλοντος του πυρηνικού αντιδραστήρα σύντηξης DEMO.

4. ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Christofilos N.C. (1989), .Design for a high power-density Astron reactor., J. Fusion Energ. 8, p. 97-105.

Gomes R.B., Silva C., Fernandes H., Duarte P., Nedzelskiy I., Lielausis O., et al. (2011), .ISTTOK tokamak plasmas influence on a liquid gallium jet dynamic behavior., J.Nucl. Mater. 415, p. S989–S992.

Golubchikov L.G., Evtikhin V.A., Lyublinski I.E., Pistunovich V.I., Potapov I.N., Chumanov A.N. (1996), . Development of a liquid-metal fusion reactor divertor with a capillary-pore system. 233-237, p. 667-672.

Mirnov S.V., Azizov E.A., Evtikhin V.A., Lazarev V.B., Lyublinski I.E., Vertkov A.V., Prokhorov D. Yo (2006), .Experiments with lithium limiter on T-11M tokamak and applications of the lithium capillary-pore system in future fusion reactor devices., J. Control. Fusion 48, p. 821–837.

Pelekasis N., Benos L., Gomez R.B. (2014), .Deflection of a liquid metal jet/drop in a tokamak environment., J. Fusion Eng. and design, in press.

Vertkov A.V., Lyublinski I.E., Zharkov M. Yu., Semenov V.V., Azizov E.A., Lazarev V.B., Mirnov S.V. (2014), .Progress in development and application of lithium based components for Tokamak., J. Fusion Eng. and design 7-8, p. 996-1002.

Ying A.Y., Morley N., Smolentsev S., Gulec K., Fogarty P., .Free surface heat transfer and innovative designs for thin and thick liquid walls., J. Fusion Eng. and design 49-50, p. 397–406.

SUMMARY

Investigation of the static arrangement in the form of a Capillary Porous System and capillary fluid motion within a single pore

In this study, the Capillary Porous System (CPS) is investigated, which is an alternative limiter for the supply of liquid metal as Plasma Facing Component (PFC). CPS aims at reducing the importance of **j**x**B** effects by virtue of capillary confinement of the liquid metal in the interior of a porous matrix that rests upon the divertor area and provides contact with the plasma interior. Specifically, the static arrangement of a liquid metal drop that rests upon a porous matrix is studied accounting for capillary and electric stresses at the interface with the surrounding medium. The liquid metal is supplied by a reservoir that remains at a higher pressure than the external medium. Both the liquid metal and the surrounding medium are treated as perfect dielectrics. The finite element methodology is employed in order to capture the drop spreading on the CPS interface as a function of the pressure drop between the reservoir and the external medium. Based on the static arrangement of the liquid metal/external medium interface, a rough estimate of the heat exhausted via the conduction in the porous matrix and the drop, the latent heat of evaporation of the liquid metal and the convection via liquid metal motion within the pores is obtained. The radiation shielding effect is excluded from the analysis at this point. As the energy analysis shows, very large lithium vapor concentration levels are anticipated in the SOL with possible reactor lithiation. Thus, a new configuration is proposed including convection phenomena via a liquid metal film flowing on the top of the CPS matrix.

Besides, the flow arrangement inside a pore is studied numerically in order to obtain a first estimate regarding the interplay of the different forces that participate in the motion of the liquid metal within the porous structure. To this end, pressure drop across the porous matrix, P_0-P_P, capillary pressure, $2\sigma\cos\theta/R_0$ and viscous, $\mu uh/R_0^2$, and magnetic, $hu\lambda B_0^2$, damping will be accounted for in the Stokes flow regime, in order to obtain an upper limit of the seepage velocity, u, through the CPS.

ΜΑΓΝΗΤΟΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΟΗ ΥΓΡΟΥ ΜΕΤΑΛΛΟΥ ΕΝΤΟΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΩΝ ΑΓΩΓΩΝ ΤΟΡΟΕΙΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Μπακάλης Παντελεήμων[1], Χατζηκωνσταντίνου Παύλος[2], Βαφέας Παναγιώτης[3]
[1]Μεταδιδακτορικός ερευνητής, Τμήμα Μηχανολόγων & Αερον. Μηχανικών, Παντεπιστήμιο Πατρών, panteleimonbakalis@upatras.gr.
[2]Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων & Αερον. Μηχανικών, Παντεπιστήμιο Πατρών, hatzikon@upatras.gr.
[3]Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Παντεπιστήμιο Πατρών, vafeas@chemeng.upatras.gr.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Η στρωτή, ασυμπίεστη, μαγνητορευστοδυναμική (ΜΥΔ) πλήρως ανεπτυγμένη ροή ενός υγρού μετάλλου εντός καμπύλου δακτυλιοειδούς αγωγού, υπό την επίδραση κάθετου εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, εξετάζεται στην παρούσα εργασία. Η μελέτη θα γίνει εφαρμόζοντας για τον υπολογισμό των ηλεκτρομαγνητικών παραμέτρων το μοντέλο h-formulation και για την επίλυση των εξισώσεων της ροής τη μέθοδο CVP. Τα αποτελέσματα λαμβάνονται για διάφορες τιμές του αριθμού Hartmann, του λόγου καμπυλότητας κ και για διάφορους λόγους της εξωτερικής προς την εσωτερική ακτίνα του υπό μελέτη καμπύλου δακτυλοειδούς αγωγού.

Λέξεις Κλειδιά: Μαγνητορευστοδυναμική Ροή, Καμπύλοι Αγωγοί, Μέθοδος CVP

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

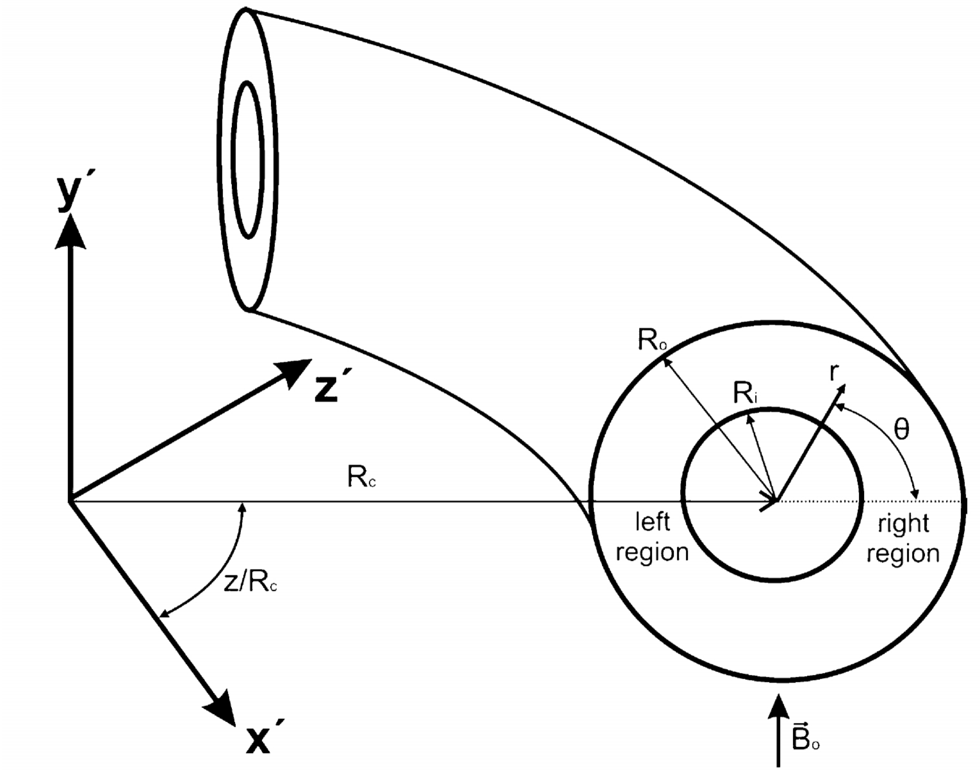
Πολλές περιπτώσεις μαγνητορευστοδυναμικών ροών περιλαμβάνουν ροές υγρών μετάλλων σε καμπύλους αγωγούς κυκλικής διατομής, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των αγωγών εισόδου και εξόδου του περιβλήματος των αντιδραστήρων πυρηνικής σύντηξης, παρόλα αυτά ελάχιστες θεωρητικές και πειραματικές εργασίες έχουν δημοσιευτεί μέχρι και σήμερα (Tabeling & Chabrerie, 1981, Issacci et al, 1988, Moresco & Alboussière, 2004) .
Η μαγνητορευστοδυναμική ροή σε αυτές τις περιπτώσεις διέπεται από τις εξισώσεις Navier Stokes και τις εξισώσεις του Maxwell. Για τη μελέτη των μαγνητορευστοδυναμικών ροών έχουν αναπτυχθεί μια σειρά μοντέλων, τα κυριότερα από αυτά είναι: α) το μοντέλο του ηλεκτρικού δυναμικού του μαγνητικού πεδίου (φ-formulation), το οποίο είναι απλό στην εφαρμογή του, έχει όμως το μειονέκτημα πως εισάγει αριθμητικά σφάλματα στη λύση στην περίπτωση υψηλών τιμών του αριθμού Hartmann, β) το μοντέλο του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου (b-formulation), το οποίο όμως απαιτεί την επίλυση επιπλέον εξισώσεων με την εφαρμογή σύνθετων συνοριακών συνθηκών, γ) του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου (j-formulation), το οποίο επίσης απαιτεί την επίλυση επιπλέον εξισώσεων με την εφαρμογή σύνθετων συνοριακών συνθηκών (Smolentsev *et al*, 2010).
Οι Morley et al (2004), χρησιμοποίησαν μια υβριδική μέθοδο για την επίλυση του αξονοσυμμετρικού προβλήματος της μαγνητορευστοδυναμικής ροής με ελεύθερη επιφάνεια, η οποία αποτελεί συνδυασμό των μοντέλων φ-formulation και b-formulation, αντιμετωπίζοντας με αυτό τον τρόπο τα αριθμητικά σφάλματα που εισάγονται από το μοντέλο φ-formulation. Οι Hatzikonstantinou & Bakalis (2014) επέκτειναν τη συγκεκριμένη μέθοδο για την εφαρμογή σε προβλήματα ροής εσωτερικών αγωγών σε ευθύγραμμους και καμπύλους αγωγούς. Η συγκεκριμένη μέθοδος, η οποία ονομάστηκε ως

h-formulation (Hatzikonstantinou & Bakalis, 2014), χρησιμοποιεί την προσέγγιση του χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds (low R_m approximation) μόνο για τις εγκάρσιες συνιστώσες του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου, B_{ir} και $B_{i\theta}$, θεωρώντας ότι αυτές είναι μηδαμινές σε σύγκριση με την ένταση του κάθετου εξωτερικού μαγνητικού πεδίου B_o, ενώ επιλύει την πλήρη εξίσωση του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου μόνο στην αξονική διεύθυνση, B_{iz}. Με βάση τα παραπάνω οι εγκάρσιες συνιστώσες της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος J_r και J_θ, υπολογίζονται από το νόμο του Ampère, ενώ η αξονική συνιστώσα, J_z, από το νόμο του Ohm.
Η υπολογιστική μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes είναι η μέθοδος CVP (Papadopoulos & Hatzikonstantinou, 2010, Bakalis & Hatzikonstantinou, 2011) η οποία αναπτύχθηκε στο εργαστήριο μας και έχει ήδη δοκιμαστεί με επιτυχία σε πλήθος προβλημάτων ρευστοδυναμικών και μαγνητορευστοδυναμικών ροών.

2. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

1.1 Μαθηματικό μοντέλο:

Θεωρούμε έναν καμπύλο κυκλικό αγωγό ακτίνας R_o με ακτίνα καμπυλότητας R_c. Στο εσωτερικό του καμπύλου κυκλικού αγωγού βρίσκεται άλλος ένας ομόκεντρος κύλινδρος με ακτίνα R_i και το υγρό μέταλλο ρέει ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους σε διάστημα $R=R_o-R_i$. Οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή θα μετασχηματιστούν σε ένα τοροειδές-πολοειδές σύστημα συντεταγμένων (r, θ, z) όπως φαίνεται στο Σχήμα 1 χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς.



Σχήμα 1. Γεωμετρία του αγωγού σε τοροειδές – πολοειδές σύστημα συντεταγμένων.

Για να καταστούν οι εξισώσεις αδιάστατες, εισάγουμε τις αδιάστατες μεταβλητές

$$t=\frac{t'V_0}{R_o'},\vec{r}=\frac{\vec{r}'}{R_o'},z=\frac{z'}{R_o'},R_c=\frac{R_c'}{R_o'},\vec{V}=\frac{\vec{V}'}{V_0},P=\frac{P'}{\rho V_0^2},\vec{B}=\frac{\vec{B}'}{B_0},\vec{J}=\frac{\vec{J}'}{\sigma V_0 B_0}$$

όπου ο τόνος “ ′” δηλώνει τις διαστατές μεταβλητές, καθώς και τις παραμέτρους των αριθμών Reynolds $Re = V_0 R_o'/\nu$, Hartmann $Ha = \sqrt{\sigma/\rho\nu}\,B_0 R_o'$ μαγνητικού Reynolds $R_m = \mu\sigma V_0 R_o'$.

Στο μοντέλο h-formulation εφαρμόζεται στην εγκάρσια διεύθυνση η προσέγγιση του χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds (Low-R_m προσέγγιση), συνεπώς προκύπτει πως οι εγκάρσιες συνιστώσες του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου είναι αμελητέες
Η ροή βρίσκεται υπό την επίδραση ενός εξωτερικού, κάθετα εφαρμοζόμενου, σταθερού μαγνητικού πεδίου $\vec{B}_o = B_o\hat{J} = B_{or}\hat{e}_r + B_{o\theta}\hat{e}_\theta = \sin\theta\hat{e}_r + cos\theta\hat{e}_\theta$, το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο ισούται με $\vec{B}_i = B_{iz}\hat{e}_z$, το συνολικό μαγνητικό πεδίο δίδεται από τη σχέση $\vec{B} = \vec{B}_o + \vec{B}_i$ και η επαγόμενη πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος ισούται με $\vec{J} = J_r\hat{e}_r + J_\theta\hat{e}_\theta + J_z\hat{e}_z$. Ο όρος $I = 1/\left(1+\kappa r\cos\theta\right)$ εισάγεται για να γραφούν οι παραπάνω εξισώσεις σε ποιο συνεπτυγμένη μορφή, όπου $\kappa = 1/R_c$ είναι ο λόγος καμπυλότητας. Επομένως, οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

Εξίσωση της συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \kappa I\left(u\cos\theta - v\sin\theta\right) = 0$$

Εξίσωση της ορμής στη r-διεύθυνση:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} - \kappa I w^2\cos\theta = -\frac{\partial P}{\partial r}$$
$$+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \kappa I\cos\theta\right)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \kappa I\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v\right) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right.$$
$$\left. -\frac{u}{r^2} + \left(\kappa I\right)^2\left(v\sin\theta - u\cos\theta\right)\cos\theta\right] + \frac{Ha^2}{Re}\left[J_\theta B_{iz} - J_z B_{o\theta}\right]$$

Εξίσωση της ορμής στη θ-διεύθυνση:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + \kappa I w^2\sin\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$
$$+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \kappa I\cos\theta\right)\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \kappa I\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right.$$
$$\left. -\frac{v}{r^2} - \left(\kappa I\right)^2\left(v\sin\theta - u\cos\theta\right)\sin\theta\right] + \frac{Ha^2}{Re}\left[J_z B_{or} - J_r B_{iz}\right]$$

Εξίσωση της ορμής στη z-διεύθυνση:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \kappa I w\left(u\cos\theta - v\sin\theta\right) = -Ip_{a,z}$$
$$+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \kappa I\cos\theta\right)\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \kappa I\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \left(\kappa I\right)^2\right]$$
$$+\frac{Ha^2}{Re}\left[J_r B_{o\theta} - J_\theta B_{or}\right]$$

Εξίσωση του επαγόμενου αξονικού πεδίου μαγνητικού πεδίου:

$$\frac{\partial B_{iz}}{\partial t} + u\frac{\partial B_{iz}}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial B_{iz}}{\partial \theta} =$$
$$\frac{1}{R_m}\left[\frac{\partial^2 B_{iz}}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \kappa I\cos\theta\right)\frac{\partial B_{iz}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_{iz}}{\partial \theta^2} - \kappa I\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial B_{iz}}{\partial \theta}\right) - \left(\kappa I\right)^2 B_{iz}\right]$$
$$+B_{ir}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{B_{i\theta}}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + B_{or}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{B_{o\theta}}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \kappa I B_{iz}(v\sin\theta - u\cos\theta)$$
$$+\kappa I w(B_{o\theta}\sin\theta - B_{or}\cos\theta)$$

Η αξονική συνιστώσα της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος J_z υπολογίζεται από το νόμο του Ohm, ενώ οι εγκάρσιες συνιστώσες $\vec{J_t} = (J_r, J_\theta)$ υπολογίζονται από το νόμο του Ampere και επομένως έχουμε

$$J_z = uB_{o\theta} - vB_{or}$$

$$J_r = \frac{1}{R_m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial B_{iz}}{\partial\theta} - \kappa IB_{iz}\sin\theta\right] \ \& \ J_\theta = -\frac{1}{R_m}\left[\frac{\partial B_{iz}}{\partial r} + \kappa IB_{iz}\cos\theta\right]$$

Η αδιάστατη ακτίνα του εξωτερικού κυλίνδρου είναι ίση με R_o=1.0 και στην περίπτωση που υπάρχει εσωτερικός κύλινδρος, η ακτίνα του είναι ίση με R_i=0.5. Στα ηλεκτρικώς μονωμένα τοιχώματα το μαγνητικό πεδίο ισούται με $\vec{B}|_{τοιχώματος} = \vec{B_o}|_{τοιχώματος}$.

1.2 Υπολογιστική μεθοδολογία:

Η υπολογιστική μέθοδος CVP για την περίπτωση της πλήρως ανεπτυγμένης περιγράφεται αναλυτικά από τους Papadopoulos & Hatzikonstantinou (2010). Συνοπτικά, χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη μεθοδολογία προκύπτουν οι συνιστώσες της ταχύτητας $\vec{V}^{n+1}$ μέσω των οποίων στη συνέχεια υπολογίζονται οι ηλεκτρομαγνητικές μεταβλητές για την πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J}^{n+1}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}^{n+1}$. Η εφαρμογή της μεθόδου ξεκινάει με μία αρχική εκτίμηση για την πίεση, που ορίζουμε ως p^n. Η γραμμικοποιημένη εξίσωση της ορμής μπορεί να λυθεί και να δώσει μια αρχική εκτίμηση της ταχύτητας $\vec{V}^*$, ως εξής

$$\frac{\partial\vec{V}^*}{\partial t} + (\vec{V}^n\vec{\nabla})\vec{V}^* = -\vec{\nabla}p^n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{V}^* + \vec{F}_L^n$$

όπου $\vec{F}_L = \vec{J}\times\vec{B}$ είναι η δύναμη Lorentz.

Η εκτίμηση αυτή της ταχύτητας δεν επαληθεύει την εξίσωση της συνέχειας. Επομένως, ορίζουμε τις διορθώσεις της ταχύτητας $\delta\vec{V}$ και της πίεσης δp

$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^* + \delta\vec{V}$ και $p^{n+1} = p^n + \delta p$

Στο επόμενο βήμα υπολογίζονται οι διορθώσεις των ταχυτήτων οι οποίες προκύπτουν από την παρακάτω εξίσωση Poisson

$$\nabla^2\delta\vec{V} = \nabla G$$

όπου $G = -\nabla\vec{V}^*$ και $\delta\vec{V} = 0$ στο σύνορο.

Μετά τον υπολογισμό των διορθώσεων των ταχυτήτων $\delta\vec{V}$ προκύπτει η εξίσωση διόρθωσης της βάθμωσης της πίεσης

$$\vec{f} = \vec{\nabla}\delta p = -\frac{\partial\delta\vec{V}}{\partial t} - (\vec{V}^n\vec{\nabla})\delta\vec{V} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\delta\vec{V} + \delta\vec{F}_L$$

Αντικαθιστώντας το $\vec{f}$, στην εξίσωση Poisson, την οποία γράφουμε στη μορφή

$$\nabla^2\delta p = \vec{\nabla}\vec{f} - G + \vec{\nabla}\delta\vec{V}$$

υπολογίζεται η διόρθωση της πίεσης δp. Από τα υπολογιζόμενα τα $\delta\vec{V}$ και δp προκύπτουν τα $\vec{V}^{n+1}$ και p^{n+1} τα οποία επαναεισάγονται στις θέσεις των $\vec{V}^n$ και p^n και η επαναληπτική διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι την τελική σύγκλιση του αλγορίθμου.

1.3 Αριθμητική ανάλυση:

Για τον καμπύλο αγωγό θα χρησιμοποιηθεί ένα μη ομοιόμορφο πλέγμα με πύκνωση στη *r*-διεύθυνση και στη θ-διεύθυνση, ώστε να μπορέσουν να υπολογιστούν τα λεπτά οριακά στρώματα της ταχύτητας που εμφανίζονται κοντά στα τοιχώματα από την επίδραση της δύναμης Lorentz.

Για τη πύκνωση του πλέγματος κοντά στα τοιχώματα στη *r*-διεύθυνση, η παρακάτω συνάρτηση χρησιμοποιείται

$$r_i = R_i + (R_o - R_i)\frac{(2a+b)\left(\dfrac{b+1}{b-1}\right)^{\frac{\bar{r}_i - a}{1-a}} + 2a - b}{(2a+1)\left[\left(\dfrac{b+1}{b-1}\right)^{\frac{\bar{r}_i - a}{1-a}} + 1\right]}$$

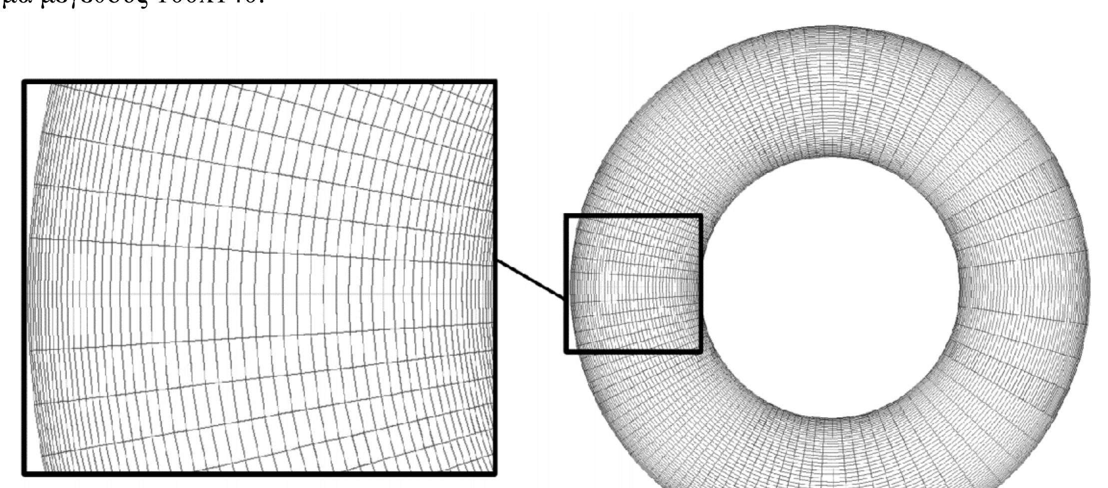
όπου α=0.5, $b = \sqrt{\sqrt{Ha}\big/\left(\sqrt{Ha-1}\right)}$ και i=1,2,…,I.

Με τη συγκεκριμένη φόρμουλα, το πλέγμα $s(\bar{r}_i)$ μετασχηματίζεται στο μη ομοιόμορφο, πυκνό κοντά στα τοιχώματα πλέγμα $s(r_i)$. Εφόσον *α=0.5*, το πλέγμα πυκνώνεται ομοιόμορφα και στα δύο τοιχώματα. Η παράμετρος *b* σχετίζεται με τον αριθμό Hartmann, επειδή όσο ο αριθμός Hartmann αυξάνεται, τα πλέγματα μειώνονται σε πάχος.
Ο παρακάτω μετασχηματισμός χρησιμοποιείται στη *θ*-διεύθυνση δύο φορές, μία στο διάστημα *0* έως *π* και μία στο διάστημα *π* έως *2π*. Έτσι ώστε το πλέγμα να είναι πυκνότερο στην αριστερή πλευρά του κυλίνδρου, όπου εμφανίζονται οι μεγαλύτερες μεταβολές της ταχύτητας.

$$\theta_j = s_c\left[1 + \frac{\sinh\left[\tau\left(\bar{\theta}_j - \gamma\right)\right]}{\sinh\left[\tau\gamma\right]}\right]$$

όπου $\gamma = \dfrac{1}{2\tau}\ln\left[\dfrac{1+(e^{\tau}-1)(s_c/\pi)}{1+(e^{-\tau}-1)(s_c/\pi)}\right]$, $s_c = 0.25$ το σημείο πύκνωσης και $\tau = 4$ η παράμετρος πύκνωσης.

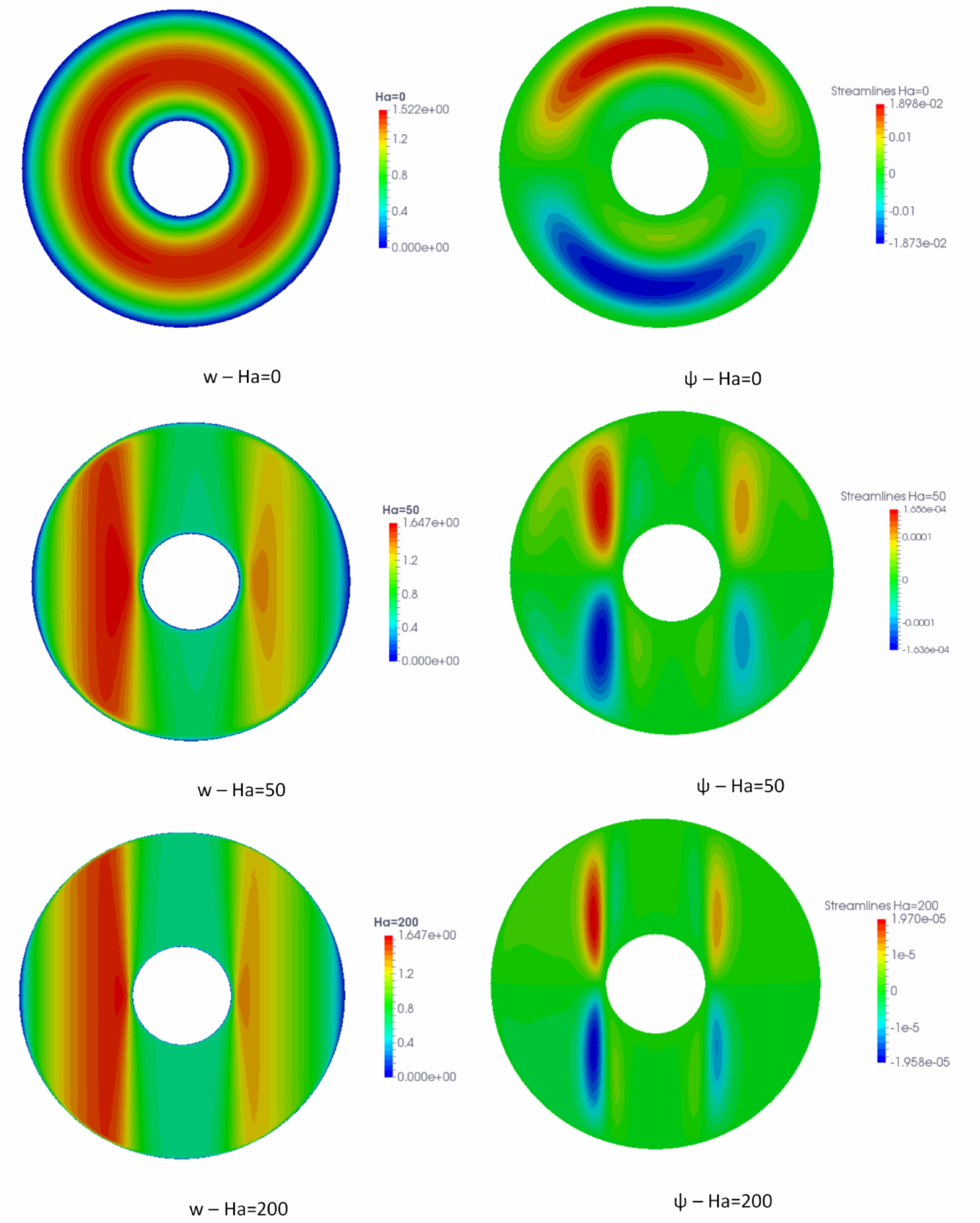
Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς, προκύπτει το 60x100 πλέγμα για *Ha=50* που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Για αριθμούς Hartmann μεγαλύτερους από 100 θα χρησιμοποιούμε πλέγμα μεγέθους 100x140.



Σχήμα 2. Μη ομοιόμορφο πλέγμα 60x100 για Ha=50.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

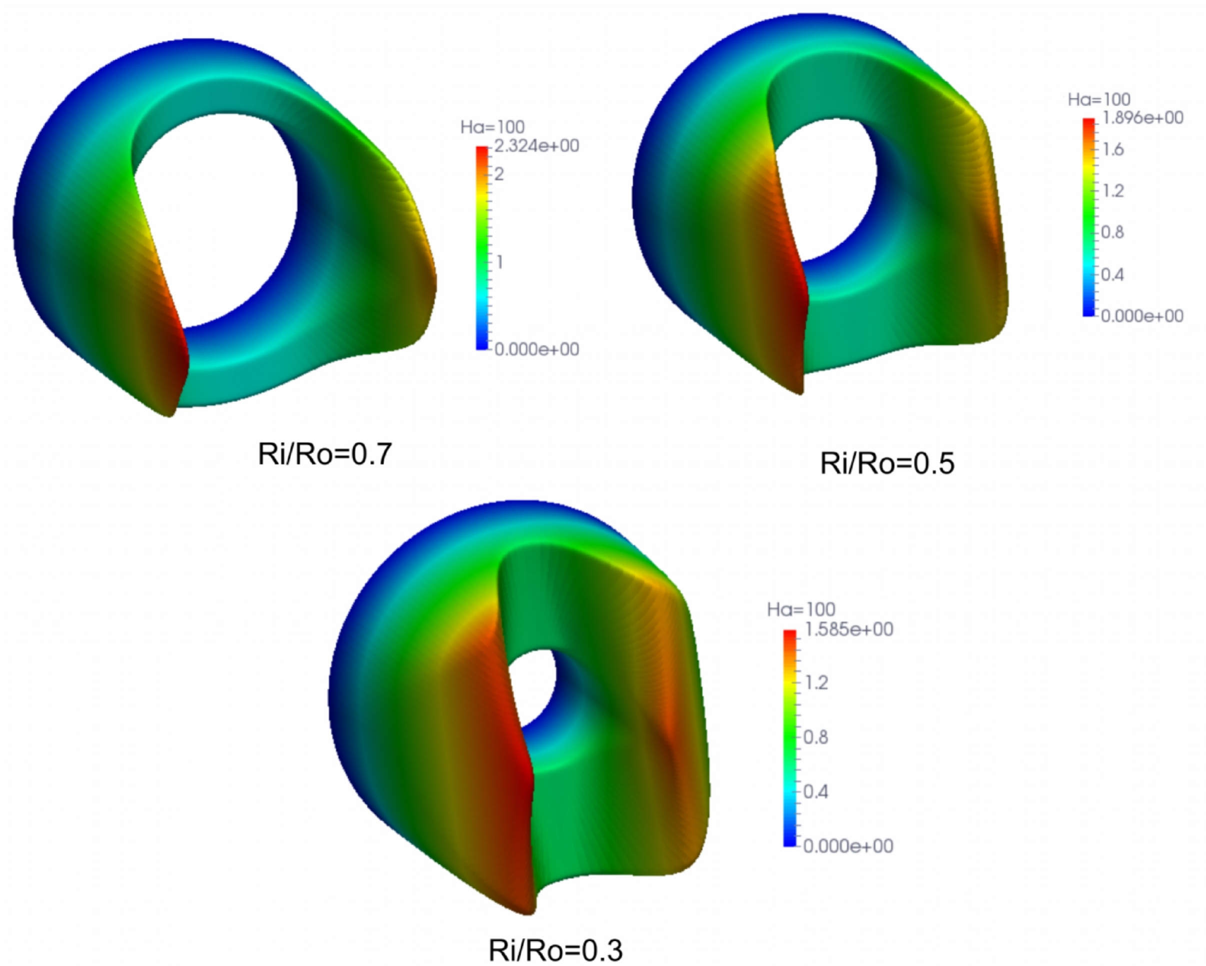
Η μεταβολή των κατανομών της αξονικής ταχύτητας *w* και οι ροϊκές γραμμές των κάθετων συνιστωσών της ταχύτητας συναρτήσει του αριθμού Hartmann παρουσιάζονται στα διαγράμματα του Σχήματος 3 για *Re*=100, λόγο καμπυλότητας *κ*=0.2, και λόγο ακτίνων R_i/R_o=0.3. Το αποτέλεσμα προκύπτει από το συνδυασμό των φυγόκεντρων και των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων.



Σχήμα 3. Εμφάνιση των κατανομών της αξονικής ταχύτητας (αριστερή στήλη) και των ροϊκών γραμμών ψ των κάθετων συνιστωσών της ταχύτητας (δεξιά στήλη) για Re=100, κ=0.2, R_i/R_o=0.3 και διάφορες τιμές του αριθμού Hartmann.

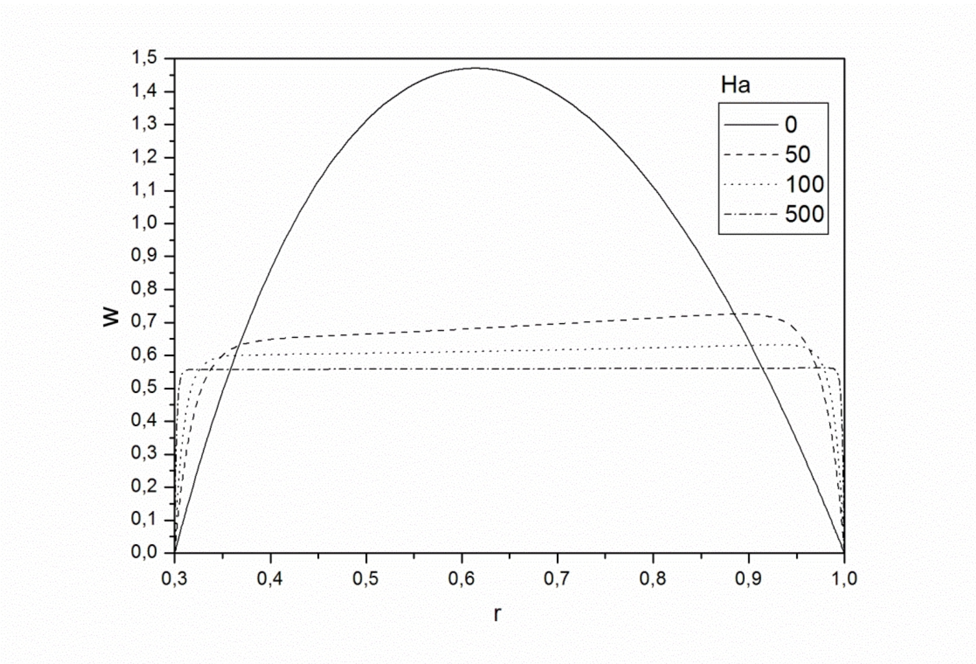
Η καμπυλότητα του αγωγού δημιουργεί πέρα από την αξονική ροή και δευτερεύουσα ροή στην εγκάρσια διατομή του αγωγού. Παρατηρώντας τις κατανομές της συνάρτησης των ροϊκών γραμμών ψ των εγκάρσιων συνιστωσών της ταχύτητας u και v βλέπουμε πως στην περίπτωση χωρίς μαγνητικό πεδίο (Ha=0) διαμορφώνονται δύο στρόβιλοι ωρολογιακής φοράς και δύο στρόβιλοι ανθωρολογιακής

φοράς. Η αύξηση του μαγνητικού πεδίου καταστέλλει τη δευτερεύουσα ροή και μειώνει σημαντικά τις τιμές των εγκάρσιων συνιστωσών της ταχύτητας κατά τάξεις μεγέθους.
Επίσης, παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται ο αριθμός Hartmann λεπτά τζετ ταχύτητας διαμορφώνονται στην αριστερή και την δεξιά πλευρά της γεωμετρίας, σε διεύθυνση παράλληλη με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Όσο αυξάνεται η καμπυλότητα, το τζετ ταχύτητας στην δεξιά πλευρά του κυλίνδρου μειώνεται, ενώ το τζετ της αξονικής ταχύτητας στην αριστερή πλευρά του κυλίνδρου αυξάνεται. Αυτό απεικονίζεται καλύτερα στην τρισδιάστατη απεικόνιση της αξονικής ταχύτητας του Σχήματος 4 για *Re*=100, *Ha*=100, *κ*=0.1 και διάφορες τιμές του λόγου των ακτίνων.



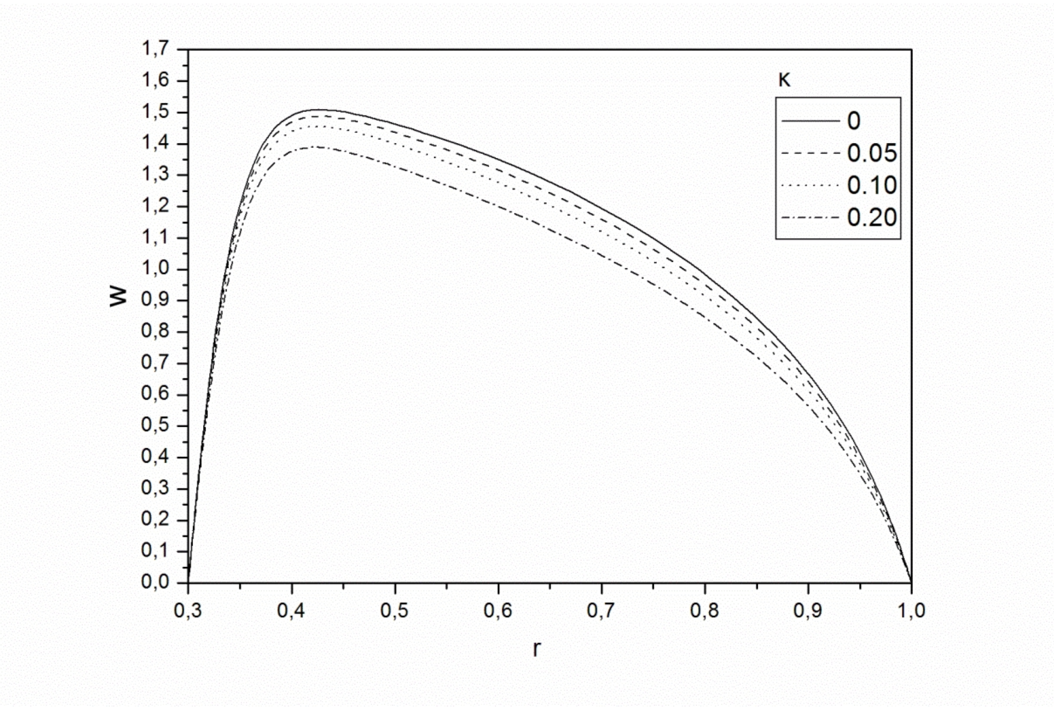
Σχήμα 4. Τρισδιάστατη απεικονιση των κατανομών της αξονικής ταχύτητας για *Re*=100, *Ha*=100, *κ*=0.1 και διάφορες τιμές του λόγου των ακτίνων.

Το προφίλ της αξονικής ταχύτητας κατά μήκος του *r*-άξονα σε γωνία θ=90° εμφανίζεται στο Σχήμα 5 για *Re*=100, R_i/R_o=0.3, *κ*=0.1 για διάφορες τιμές του αριθμού Hartmann. Με την αύξηση του αριθμού Hartmann το προφίλ της αξονικής ταχύτητας εξομαλύνεται κοντά στα τοιχώματα που είναι κάθετα στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, σαν αποτέλεσμα της επίδρασης της δύναμης Lorentz. Κοντά στα τοιχώματα δημιουργούνται λεπτά οριακά στρώματα που μειώνονται σε πάχος όσο αυξάνεται ο αριθμός Hartmann..



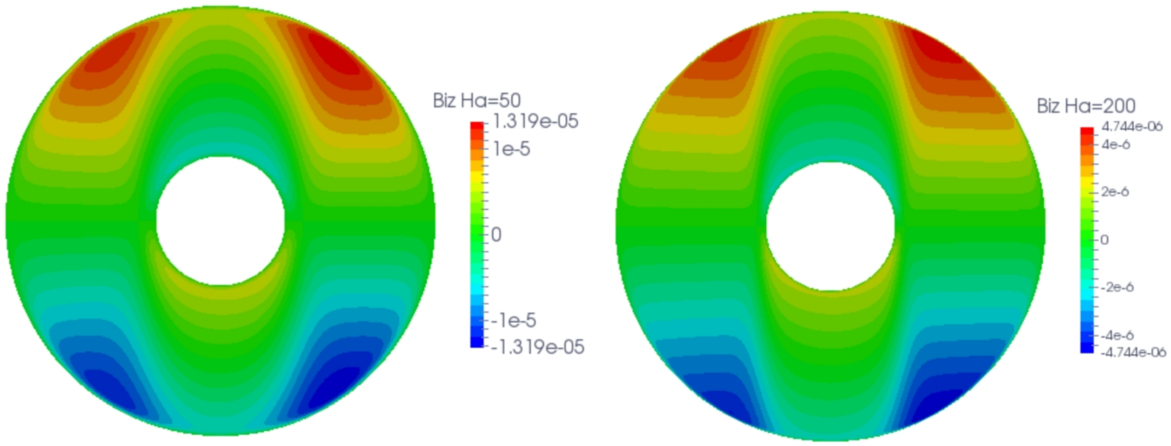
Σχήμα 5. Προφίλ της αξονικής ταχύτητας σε γωνία θ=90° για *Re*=100, R_i/R_o=0.3, *κ*=0.1 και διάφορες τιμές του αριθμού Hartmann.

Η επίδραση της καμπυλότητας στην αξονική ταχύτητα παρουσιάζεται στο Σχήμα 6, όπου εμφανίζονται τα προφίλ της αξονικής ταχύτητας σε γωνία θ=0° για διάφορες τιμές του λόγου καμπυλότητας καμπυλότητας (*κ*=0, 0.05, 0.1, 0.2) και για *Re*=100, R_i/R_o=0.3, *Ha*=100. Όπως παρατηρείται, αυξάνοντας τις τιμές του λόγου καμπυλότητας *κ*, οι τιμές της αξονικής ταχύτητας στη δεξιά πλευρά του αγωγού υπό την επίδραση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου μειώνονται.



Σχήμα 6. Προφίλ της αξονικής ταχύτητας σε γωνία θ=0° για *Re*=100, R_i/R_o=0.3, *Ha*=100 και διάφορες τιμές του λόγου καμπυλότητας.

Οι κατανομές του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου B_{iz} παρουσιάζονται στο Σχήμα 7 για Re=100, κ=0.1, R_i/R_o=0.3 και για Ha=50 και 200. Το μαγνητικό πεδίο κατανέμεται σε δύο περιοχές με θετικές τιμές κοντά στις γωνίες θ=45° και θ=135° και δύο τιμές με αρνητικές τιμές κοντά στις γωνίες θ= -45° και θ= -135°. Η κατανομή του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου εμφανίζεται σχεδόν συμμετρική με άξονα συμμετρίας το κέντρο της γεωμετρίας παράλληλα προς το εξωτερικό μαγνητικού πεδίου, με μια μικρή αύξηση προς τη δεξιά πλευρά λόγω της επίδρασης της καμπυλότητας. Η αύξηση της τιμής του αριθμού Hartmann οδηγεί στη μείωση της τιμής του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου B_{iz}, σχεδόν κατά μία τάξη μεγέθους.



Σχήμα 7. Εμφάνιση των κατανομών του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου B_{iz} για Re=100, κ=0.1, R_i/R_o=0.3 και για τιμές του αριθμού Hartmann Ha=50 (αριστερά) και Ha=200 (δεξιά).

Η πτώση πίεσης λόγω της επίδρασης του λόγου καμπυλότητας, του λόγου των ακτίνων και του μαγνητικού πεδίου παρουσιάζεται στον Πίνακα 1. Η συνεισφορά της καμπυλότητας στις τιμές της αξονικής παραγώγου της πίεσης p_{az} είναι σημαντική μόνο στην περίπτωση για Ha=0. Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου και του λόγου καμπυλότητας στην αξονική παράγωγο της πίεσης είναι ακόμα πιο σημαντική. Όσο αυξάνεται ο αριθμός Hartmann οι τιμές της αξονικής παραγώγου της πίεσης p_{az} αυξάνονται σημαντικά για την διατήρηση της ίδιας παροχής λόγω της επίδρασης της δύναμης Lorentz στη ροή του ρευστού. Η μείωση της εσωτερικής ακτίνας επίσης αυξάνει σημαντικά τις τιμές της αξονικής παραγώγου της πίεσης για τη διατήρηση της ίδιας παροχής, λόγω της αύξησης της τριβής των τοιχωμάτων.

Πίνακας 1. Τιμές της αξονικής παραγώγου της πίεσης p_{az} για διάφορες τιμές του αριθμού Hartmann, του κ και για διάφορους λόγους καμπυλότητας.

	Ha=0		**Ha=50**		**Ha=100**		**Ha=500**	
R_i/R_o	**κ=0**	**κ=0.20**	**κ=0**	**κ=0.20**	**κ=0**	**κ=0.20**	**κ=0**	**κ=0.20**
0.3	-0,53	-0,24	-0,94	-0,93	-1,73	-1,71	-7,86	-7,91
0.5	-0,47	-0,47	-1,36	-1,34	-2,41	-2,38	-10,72	-10,57
0.7	-2,60	-1,31	-3,19	-3,13	-4,16	-4,09	-17,27	-16,76

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η επίδραση της καμπυλότητας και του μαγνητικού πεδίου στην κατανομή της ταχύτητας και στην πτώση πίεσης παρουσιάστηκαν στη συγκεκριμένη εργασία.
Από τα αποτελέσματα προκύπτει πως υπάρχει σημαντική επίδραση στην κατανομή της ταχύτητας από την μεταβολή του μαγνητικού πεδίου και τη μεταβολή του λόγου των ακτίνων και μικρότερη επίδραση από τη μεταβολή του λόγου καμπυλότητας κ.
Η αύξηση της καμπυλότητας δημιουργεί φυγόκεντρες δυνάμεις που επιδρούν στην αξονική ταχύτητα ενώ και το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που επίσης επηρεάζουν την αξονική ταχύτητα. Όσο αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου η δύναμη Lorentz επικρατεί απόλυτα των φυγόκεντρων δυνάμεων και το μαγνητικό πεδίο τείνει να μηδενίσει τη δευτερεύουσα ροή που προκύπτει λόγω της καμπυλότητας. Για μεγάλες τιμές του μαγνητικού πεδίου η ροή εντός του δακτυλιοειδούς αγωγού οδηγείται στην ανάπτυξη δύο πλευρικών τζετ ροής παράλληλων προς τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.
Η δευτερογενής ροή η οποία σχηματίζεται λόγω της καμπυλότητας του αγωγού καταστέλλεται σε σημαντικό βαθμό από την επίδραση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Τέλος, η μεταβολή της αξονικής παραγώγου της πίεσης εξαρτάται στο μεγαλύτερο βαθμό από την αύξηση του μαγνητικού πεδίου και του λόγου των ακτίνων και σε μικρότερο βαθμό από τη μεταβολή της καμπυλότητας.

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bakalis, P.A. and Hatzikonstantinou, P.M. (2011), .MHD and thermal flow between isothermal vertical concentric cylinders with rotation of the inner cylinder., Numerical Heat Transfer A, Vol. 59 No. 11, p. 836-856.

Hatzikonstantinou P.M. and Bakalis, P.A. (2014), .A computational approach for the solution of the MHD and thermal flow of a liquid metal between two horizontal concentric cylinders., Progress In Computational Fluid Dynamics, Vol. 14 No. 4, p. 259-267.

Issacci, F., Ghoniem, N.M. and Catton, I. (1988), .Magnetohydrodynamic flow in a curved pipe., Physics of Fluids, Vol. 31, p. 65-71.

Moresco, P. and Alboussière, T. (2004), .Experimental study of the instability of the Hartmann layer., Journal of Fluid Mechanics, Vol. 504, p. 167-181.

Morley, N.B, Smolentsev, S., Munipalli, R., Ni, M.J., Gao, D. and Abdou, M. (2004), .Progress on the modelling of liquid metal, free Surface, MHD flows for fusion liquid walls., Fusion Engineering and Design, Vol. 72, p. 3-34.

Papadopoulos, P.K. and Hatzikonstantinou, P.M. (2010), .Improved CVP scheme for laminar incompressible flows., International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 65 No. 9, p. 1115-1132.

Smolentsev, S., Cuevas, S., Beltrán, A. (2010), .Induced electric current-based formulation in computations of low magnetic Reynolds number magnetohydrodynamic flows., Journal of Computational Physics, Vol. 229 No. 5, p. 1558-1572.

Tabeling, P. and Chabrerie, J.P. (1981), .Magnetohydrodynamic secondary flows at high Hartmann numbers., Journal of Fluid Mechanics, Vol. 103, p. 225-239.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑΣ ΔΕΣΜΗΣ ΕΚΡΟΗΣ ΣΤΟ ΕΓΓΥΣ ΠΕΔΙΟ

Α. Π. Βούρος[1], A. Pollard[2], R. R. Schwab[2] και Θ. Πανίδης[1]
[1] Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
[2] Dept. of Mechanical and Materials Engineering, Queen's University, Kingston, Canada
e-mails: andrew.pollard@queensu.ca, panidis@upatras.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται πειραματικά αποτελέσματα της ανάπτυξης, στο εγγύς πεδίο, μιας ορθογώνιας δέσμης εκροής με λόγο πλευρών 10. Η δέσμη εκρέει από ένα ορθογωνικό ακροφύσιο με αιχμηρά χείλη, που βρίσκεται τοποθετημένο στην κατάντη πλευρά θαλάμου καθησυχασμού με τετραγωνική διατομή. Ο αριθμός Reynolds με βάση το πλάτος της σχισμής του ακροφυσίου, h, είναι Re_h=23000. Παρουσιάζονται μετρήσεις ανεμομετρίας θερμού σύρματος δύο συνιστωσών, σε πλέγματα σημείων σε εγκάρσιες τομές της δέσμης που παρέχουν πληροφορίες για τα τρισδιάστατα χαρακτηριστικά του ροϊκού πεδίου. Τεχνικές παρεμβολής για την χωρική πύκνωση των αποτελεσμάτων δίνουν τη δυνατότητα προσδιορισμού των χωρικών παραγώγων των μέσων μεγεθών και τον υπολογισμό σημαντικών μεγεθών, όπως η μέση στροβιλότητα. Πέρα από την παρουσία κατανομών της μέσης ταχύτητας μορφής σάγματος, τα αποτελέσματα χαρακτηρίζονται και από την εμφάνιση ενός περιγράμματος σχήματος αλτήρα στις ισοϋψείς αρκετών ιδιοτήτων (π.χ. της μέσης ταχύτητας). Οι κατανομές μορφής σάγματος φαίνεται να επηρεάζονται από τις κατανομές της στροβιλότητας, ενώ το περίγραμμα αλτήρα μπορεί να συνδεθεί με δύο όρους της εξίσωσης μεταφοράς της μέσης στροβιλότητας στους οποίους αποδίδεται η μεταφορά ρευστού από το κέντρο της δέσμης προς την περιφέρεια.

Λέξεις Κλειδιά: Δέσμες εκροής, Στροβιλότητα, Σαγματική κατανομή, Εναλλαγή αξόνων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ
Οι δέσμες εκροής έχουν ερευνηθεί εκτενώς ως ένα βασικό πρόβλημα της τύρβης αλλά και λόγω του ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν σε πολλές πρακτικές εφαρμογές. Μεταξύ των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων των ορθογώνιων δεσμών εκροής, η δημιουργία κατανομών της μέσης ταχύτητας τύπου σάγματος, που αναφέρονται στην παρουσία δύο μεγίστων εκτός του διαμήκους άξονα και το φαινόμενο της εναλλαγής αξόνων, κατά το οποίο ο μεγάλος και ο μικρός άξονας της εγκάρσιας τομής της δέσμης εναλλάσσονται λόγω διαφορετικών ρυθμών εξάπλωσης ή σύγκλισης, φαίνεται να συνδέονται άμεσα με τη μεταφορά της στροβιλότητας, αν και οι εμπλεκόμενοι μηχανισμοί δεν είναι ακόμα πλήρως κατανοητοί.

Στο παρελθόν η μελέτη των δεσμών εκροής επικεντρώθηκε στην επίδραση ενός μεγάλου εύρους αρχικών και συνοριακών συνθηκών στην ανάπτυξη και τα μέσα και τυρβώδη χαρακτηριστικά της ροής. Από τις πρώτες εργασίες με αντικείμενο τις δέσμες εκροής (Bradbury, 1965, Sforza και Herbst, 1970, duPlessis et al., 1974, , Krothapalli et al., 1981) μέχρι σήμερα, υπάρχει πλήθος αναφορών που σχετίζονται με την επίδραση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διατομής, του αριθμού Reynolds και του λόγου του μήκους της «μεγάλης» προς εκείνο της «μικρής» διάστασης ορθογωνικών ακροφυσίων (aspect ratio, AR). Οι συνθήκες για τις οποίες μπορεί να εμφανίζεται η χαρακτηριστική μορφή ενός σάγματος στις κατανομές της μέσης αξονικής ταχύτητας αποτέλεσε βασικό αντικείμενο μελέτης στην εργασία των Tsuchiya et al. (1986), στην οποία μελετήθηκαν δέσμες που παράγονταν από ακροφύσια διαφορετικής γεωμετρίας. Οι συγγραφείς, βασιζόμενοι σε πλήθος πειραματικών δεδομένων έδειξαν ότι η μορφή σάγματος εμφανίζεται κυρίως για λόγους AR μεγαλύτερους από 5. Επιπλέον, προσπάθησαν να αποδώσουν τη δημιουργία της στα χαρακτηριστικά της μίξης της δέσμης με το περιβάλλον ρευστό και στην ανάπτυξη της δέσμης, σε σχέση τόσο με το ημιπλάτος με βάση τη μέση αξονική ταχύτητα αλλά και τις τυρβώδεις διακυμάνσεις, που επηρεάζονταν σημαντικά από τον τύπο του ακροφυσίου, αλλά και από τον αριθμό Reynolds κάθε πειράματος. Η κρίσιμη σημασία του λόγου AR επιβεβαιώθηκε στις εργασίες των Quinn et al. (1985) και Quinn και Millitzer (1988), όπου παρουσιάστηκαν πειραματικές μετρήσεις αλλά και αποτελέσματα υπολογιστικών προσομοιώσεων για το μέσο πεδίο της ταχύτητας και της πίεσης και των τυρβωδών διακυμάνσεων της ταχύτητας. Οι Pollard και Iwaniw (1985) και Swab (1986) ήταν από τους πρώτους που πραγματοποίησαν πειραματικές μετρήσεις για τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας και επιπλέον, σε όλη την έκταση της διατομής της δέσμης εκροής. Οι συγγραφείς κατάφεραν με αυτόν τον τρόπο να καταγράψουν τα τρισδιάστατα χαρακτηριστικά του ροϊκού πεδίου, χωρίς όμως να μπορέσουν να αναλύσουν τα αίτια αλλά και τους μηχανισμούς που είναι υπεύθυνοι για τη δημιουργία του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού γνωρίσματος. Στην πιο σύγχρονη βιβλιογραφία, οι εργασίες των Deo et al. (2007a, 2007b) έδειξαν ότι η συγκεκριμένη μορφή είναι δυνατό να εξαλειφθεί αν χρησιμοποιηθεί κατάλληλη διαμόρφωση (smoothing) στην έξοδο του ακροφυσίου.

Η δομή της ροής κοντά στην έξοδο ορθογωνικής μορφής ακροφυσίων σχετίζεται επίσης με το φαινόμενο της εναλλαγής των αξόνων, το οποίο ουσιαστικά προκύπτει από την εξάπλωση και σύγκλιση της δέσμης στους δύο κάθετους εγκάρσιους άξονες με βάση την αξονική ταχύτητα. Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες σχετικές εργασίες είναι αυτή του Zaman (1996), οποίος αναγνώρισε περιοχές θετικής και αρνητικής αξονικής στροβιλότητας σε διαφορετικές περιοχές εγκάρσιων τομών της δέσμης εκροής. Πιο συγκεκριμένα, ο Zaman αναγνώρισε περιοχές με περιστροφή σύμφωνη με τους δείκτες ενός ρολογιού στην πάνω αριστερά και κάτω δεξιά γωνία, και αντίθετη περιστροφή στην πάνω δεξιά και κάτω αριστερά γωνία της τομής. Το πεδίο της στροβιλότητας θεωρήθηκε υπεύθυνο για την εμφάνιση επιπλέον δομών (bulges or puffs) στα άκρα της ορθογωνικής διατομής, έτσι ώστε να διαμορφώνονται τελικά κατανομές αξονικής ταχύτητας τύπου αλτήρα, έτσι όπως φαίνεται για παράδειγμα σε μια από τις πιο χαρακτηριστικές ισοϋψείς της αξονικής ταχύτητας για $U/U_{cl}=0.5$ (όπου U_{cl}, η τιμή της μέσης αξονικής ταχύτητας στο κέντρο της δέσμης εκροής). Ο τρόπος δημιουργία αυτών των χαρακτηριστικών δομών συζητήθηκε επίσης στις εργασίες των Gridstein (2001), McIlwain και Pollard (2002), με βάση τόσο πειραματικά αποτελέσματα όσο και αποτελέσματα υπολογιστικών προσομοιώσεων, που έδειξαν επίσης το «πλέξιμο» των δομών αρνητικής και θετικής στροβιλότητας , που εμφανίζονταν ανά ζεύξη στις δύο πλευρές της τομής της δέσμης εκροής. Σε κάποιες από τις πιο πρόσφατες εργασίες, οι Tipnis et al. (2013) όρισαν τις συνθήκες για τις οποίες μπορεί να εμφανίζεται η εναλλαγή των αξόνων, με βάση τόσο το λόγο πλευρών (AR) του ακροφυσίου, όσο και τη γεωμετρία του, και κυρίως την εσωτερική διαμόρφωση του χείλους εκροής, ακριβώς πριν την έξοδο της δέσμης.

2. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Η δέσμη εκροής παράγεται από ένα ορθογωνικού τύπου ακροφύσιο με αιχμηρά χείλη, που βρίσκεται τοποθετημένο στην κατάντη πλευρά θαλάμου καθησυχασμού με τετραγωνική διατομή. Οι διαστάσεις της διατομής του θαλάμου καθησυχασμού είναι $350x350mm^2$, ενώ το μήκος του είναι 1,05m. Το ρεύμα του αέρα παράγεται με τη βοήθεια φυσητήρα, ενώ πριν το θάλαμο καθησυχασμού χρησιμοποιούνται κατάλληλα βοηθήματα και διατάξεις πλεγμάτων ώστε να εξομαλυνθεί η ροή και να ελαχιστοποιηθούν τα επίπεδα έντασης της τύρβης. Το τελικό ακροφύσιο έχει διαστάσεις $70x7mm^2$. Ο αριθμός Reynolds με βάση το πλάτος της σχισμής του ακροφυσίου, h, είναι $Re_h=23000$. Με βάση την υδραυλική διάμετρο, D_h, ο αντίστοιχος αριθμός Reynolds είναι $Re_{Dh}=42000$, τιμή η οποία βρίσκεται πέρα από το όριο της μεταβατικής περιοχής έτσι όπως ορίζεται από τους Dimotakis (2000) και επίσης, από τους Fellouah και Pollard (2009) και Bali et al. (2012).

Οι μετρήσεις υλοποιήθηκαν με τη βοήθεια της τεχνικής ανεμομετρίας θερμού σύρματος. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε ανεμόμετρο σταθερής θερμοκρασίας (Disa-Dantec 55M10) και αισθητήριο τύπου X (Disa-Dantec 55P61) με λόγο υπερθέρμανσης 1.8. Οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας μετρήθηκαν ανά ζεύγη: πρώτα, η αξονική και η κάθετη στη βασική διεύθυνση της ροής, παράλληλα στον άξονα *y*, και κατόπιν, με περιστροφή του αισθητηρίου, η κάθετη στη διεύθυνση της ροής, στον άξονα z. Η γεωμετρία του ακροφυσίου και το σύστημα συντεταγμένων φαίνονται στο Σχήμα 1.

Η συλλογή των πειραματικών δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε ένα εγκάρσιο πλέγμα 40x16 σημείων, που βρίσκονταν σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, σε αξονικές αποστάσεις από την έξοδο του ακροφυσίου x/h=0, 1, 2, 5, 10 και 30, με βάση το πλάτος του ακροφυσίου, h. Στην κεντρική περιοχή της δέσμης, η αβεβαιότητα στη μέτρηση των μέσων τιμών εκτιμήθηκε κοντά στο 1% και στη μέτρηση των διακυμάνσεων (r.m.s.) κοντά στο 5%. Οι αβεβαιότητες στα όρια της ροής αναμένεται να είναι γενικά μεγαλύτερες, λόγω των απότομών κλίσεων και της μικρής σχετικά τιμής της αξονικής ταχύτητας.

Οι ισοϋψείς των πεδίων ταχύτητας και στροβιλότητας βασίστηκαν στην μέθοδο χωρικής πύκνωσης με παρεμβολή «Kringing». Η μέθοδος αυτή διατηρεί τις πειραματικές τιμές στα σημεία μέτρησης, ενώ αποδίδει τιμές στα επιπλέον σημεία του πλέγματος λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές στα γειτονικά σημεία. Η επίδραση των τελευταίων «ζυγίζεται» με βάση την απόσταση από το σημείο ενδιαφέροντος με βάση ένα σφαιρικό μοντέλο (Davis 2002). Λόγω της διαφορετικής έκτασης της δέσμης στις διάφορες αξονικές αποστάσεις, χρειάστηκε ένα επιπλέον ενδιάμεσο πλέγμα, χρησιμοποιώντας την μεταβλητή $z/z_{1/2}$, όπου $z_{1/2}$, το ημιπλάτος της δέσμης εκροής στον άξονα *z*, έναντι του z/h. Μετά την χωρική πύκνωση σε αυτό το πλέγμα, χρησιμοποιήθηκαν οι πραγματικές τιμές z/h, έτσι ώστε το νέο πλέγμα να αποτελείται από 91x41x11 σημεία στις τρεις διαστάσεις (x/h, y/h, z/h).

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Μέσο πεδίο ταχύτητας

Η εναλλαγή των αξόνων ως αποτέλεσμα της εξάπλωσης και της σύγκλισης της ροής στους δύο εγκάρσιους άξονες φαίνεται στο Σχήμα 2. Το σχήμα παρουσιάζει την εξέλιξη του ημιπλάτους της μέσης αξονικής ταχύτητας στο *y* και *z* άξονα, όπως αυτοί φαίνονται στο Σχήμα 1. Η εναλλαγή των αξόνων φαίνεται ότι συμβαίνει πολύ κοντά στον τελευταίο σταθμό μέτρησης (x/h=30). Τα αποτελέσματα βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με εκείνα του Quinn (1992), που παρουσιάζονται επίσης στο διάγραμμα με τη μαύρη συνεχόμενη γραμμή. Τα πειραματικά αποτελέσματα των δύο εργασιών αναφέρονται σε δέσμες που εκρέουν από ορθογωνικής μορφής εξόδους με τον ίδιο λόγο πλευρών (*AR*=10).

Οι κατανομές της μέσης αξονικής ταχύτητας σε αδιάστατες αξονικές αποστάσεις με βάση το πλάτος του ακροφυσίου, h, x/h=1,2,5,10 και 30 παρουσιάζονται στο Σχήμα 3. Στην έξοδο του ακροφυσίου, η κατανομή είναι σχεδόν ομοιόμορφη. Αμέσως μετά, η ανάπτυξη των διατμητικών στρωμάτων και η ανάμιξη με το περιβάλλον ρευστό έχει ως αποτέλεσμα της μείωση των τιμών της ταχύτητας στην περιφέρεια της δέσμης. Σε όλα τα διαγράμματα, η μαύρη συνεχόμενη γραμμή υποδηλώνει το γεωμετρικό τόπο στον οποίο η τιμή της ταχύτητας είναι η μισή από την τιμή της στο κέντρο της δέσμης. Η γραμμή αυτή αποκαλύπτει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της ροής όπως αυτή αναπτύσσεται. Στις εν λόγω περιοχές παρατηρείται αρχικά η αλληλεπίδραση των χαρακτηριστικών αυτών δομών (x/h=2 και 5), όπως επίσης η εγκάρσια επιμήκυνση του πεδίου αμέσως μετά το τέλος της αλληλεπίδρασης (x/h=10) που έχει ως αποτέλεσμα την διαμόρφωση του χαρακτηριστικού σχήματος αλτήρα (x/h=10) για το περίγραμμα της ισοϋψούς και παράλληλα της κατανομή τύπου σάγματος που συνοδεύεται επίσης από τις υψηλές τιμές της αξονικής ταχύτητας σε συμμετρικές αποστάσεις από τον άξονα εκροής της δέσμης. Στον πιο μακρινό σταθμό μέτρησης, τα παραπάνω χαρακτηριστικά εξαλείφονται και η κατανομή ταιριάζει περισσότερο σε εκείνη μιας τυπικής αξονοσυμμετρικής δέσμης.

3.2 Τυρβώδεις διακυμάνσεις και τάσεις Reynolds

Στο Σχήμα 4 παρουσιάζονται οι ισοϋψείς της τυρβώδους διακύμανσης της αξονικής ταχύτητας σε αδιάστατες αποστάσεις *x/h*=1, 2, 5, 10 και 30. Οι κατανομές αυτές χαρακτηρίζονται από εξαιρετική συμμετρία ενώ οι τιμές στον πρώτο σταθμό μέτρησης είναι πολύ χαμηλές, δείγμα της πολύ καλής ποιότητας της ροής στην έξοδο της δέσμης. Αμέσως μετά την έξοδο, οι τιμές αυξάνονται λόγω της ανάπτυξης των διατμητικών στρωμάτων. Η εσωτερική ζώνη υψηλών τιμών που φαίνεται κυρίως σε απόσταση *x/h*=2 είναι πολύ λιγότερο εμφανής στον αμέσως απόμενο σταθμό μέτρησης (*x/h*=5), όπου δύο διακριτές αλλά πολύ μικρής έκτασης περιοχές δείχνουν τις ζώνες όπου δεν έχουν διεισδύσει τα διατμητικά στρώματα. Στην πιο μακρινή απόσταση (*x/h*=30), οι υψηλότερες τιμές τυρβωδών διακυμάνσεων παρατηρούνται στο κέντρο της δέσμης, και η κατανομή έχει την ίδια μορφή με εκείνη της μέσης ταχύτητας στην ίδια αξονική απόσταση.

Στις δέσμες εκροής, οι κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας *V* και *W* έχουν αντίθετη φορά στο αριστερά και δεξιά και αντίστοιχα στο άνω και κάτω τμήμα της δέσμης. Η συμπεριφορά αυτή έχει ως αποτέλεσμα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των διακυμάνσεων των δύο συνιστωσών *v* και *w* να παρουσιάζουν αντισυμμετρικά χαρακτηριστικά με βάση το επίπεδο αναφοράς τους. Επιπλέον, αναμένεται οι τυρβώδεις τάσεις *uv* και *uw* να παρουσιάζουν αντίθετα πρόσημα εκατέρωθεν των επιπέδων συμμετρίας που ορίζονται από το *y* και τον *z* άξονα, αντίστοιχα. Στο Σχήμα 5, παρουσιάζεται η τάση *uw*, η οποία είναι συμβατή με την αναμενόμενη συμμετρία. Η μεταβλητή αυτή παίρνει υψηλές τιμές σε περιοχές όπου η ροή της δέσμης αλληλεπιδρά έντονα με το περιβάλλον ρευστό που προσροφάται στο εσωτερικό της δέσμης, ενώ υπάρχει μια περιοχή πολύ κοντά στον άξονα y όπου οι τιμές είναι μηδενικές. Παρόμοια χαρακτηριστικά, αλλά με τις αντίστοιχες περιοχές να βρίσκονται στο αριστερό και στο δεξί τμήμα της δέσμης (αντί του άνω και κάτω) ισχύουν και για την τάση uv, αν και η τελευταία δεν παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία.

3.3 Πεδίο στροβιλότητας

Στο Σχήμα 6 παρουσιάζεται το μέτρο της στροβιλότητας, ενώ στα Σχήματα 7α, β και γ παρουσιάζονται οι τρεις συνιστώσες του διανύσματός της. Σε σχέση με το μέτρο, φαίνεται ότι στην έξοδο, αυτό εξαρτάται κυρίως από τα διατμητικά στρώματα της αξονικής ταχύτητας. Σε μικρές αποστάσεις από την έξοδο (*x/h*=2 και 5), οι περιοχές υψηλών τιμών στροβιλότητας συμφωνούν με το περίγραμμα της δέσμης, όπως αυτό ορίζεται από την χαρακτηριστική ισοϋψή της ταχύτητας με τη μαύρη γραμμή, ενώ αμέσως μετά (*x/h*=10), φαίνεται ότι τα μικρότερης έκτασης διατμητικά στρώματα οδηγούν σε υψηλότερες τιμές που παραμένουν στο αριστερό και το δεξί τμήμα της δέσμης. Έχει ενδιαφέρον ότι η συμπεριφορά αυτή χαρακτηρίζει και τον τελευταίο σταθμό μέτρησης, παρά το γεγονός ότι το πεδίο μπορεί να θεωρηθεί αξονοσυμμετρικό.

Εστιάζοντας στην κατανομή της αξονικής στροβιλότητας στην έξοδο (*x/h*=0), φαίνονται καθαρά οι περιοχές θετικής (ωρολογιακής φοράς) και αρνητικής (αντί-ωρολογιακής φοράς) στροβιλότητας στις τέσσερις γωνίες της τομής της δέσμης. Σε απόσταση *x/h*=2, το εσωτερικό τμήμα της δέσμης καλύπτεται από αρνητικές τιμές ενώ θετικές τιμές παρατηρούνται μόνο έξω από τα όρια της δέσμης. Παρόμοια χαρακτηριστικά ισχύουν και στους επόμενους σταθμούς μέτρησης (*x/h*=5 και 10), όπου όμως οι θετικές τιμές μειώνονται και οι αρνητικές γίνονται πιο σημαντικές στα κεντρικά τμήματα από ότι στις άνω-δεξιά και κάτω-αριστερά γωνίες. Σε απόσταση *x/h*=30, οι τιμές της αξονικής συνιστώσας της στροβιλότητας είναι σχεδόν μηδενικές.

Παρατηρώντας τώρα τις συνιστώσες της στροβιλότητας στις κάθετες διευθύνσεις, φαίνεται ότι αυτές σχετίζονται κυρίως με τις παραγώγους της αξονικής ταχύητας που αναπτύσσονται στα αντιστοιχα διατμητικά στρώματα. Έτσι η συνιστώσα Ω_y παίρνει θετικές ή αρνητικές τιμές πάνω και κάτω από τον εγκάρσιο άξονα παράλληλα στη μεγάλη διάσταση της δέσμης, και αντίστοιχα η Ω_z συνιστώσα καθορίζεται από το διατμητικό στρώμα της μικρής πλευράς της δέσμης. Μια σημαντική παρατήρηση σχετίζεται με το γεγονός ότι η τελευταία συνιστώσα αποκαλύπτει ουσιαστικά δύο ζεύγη ζωνών αρνητικής και θετικής στροβιλότητας (γεγονός που δεν ισχύει για την συνιστώσα Ω_y), το κέντρο των οποίων βρίσκεται στις θέσεις μέγιστης αξονικής ταχύτητας στις κατανομές τύπου σάγματος για τις αντίστοιχες αξονικές αποστάσεις. Έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι η συγκεκριμένη μορφή είναι αποτέλεσμα εγκάρσιας στροβιλότητας.

Φαίνεται ότι η εμφάνιση της μορφής σάγματος των κατανομών της αξονικής ταχύτητας (αλλά και του μέτρου της στροβιλότητας) συνδέεται με τη διαμόρφωση κατανομής μορφής αλτήρα, που παρατηρείται αμέσως μετά την έξοδο της δέσμης ατο ακροφύσιο. Η μορφή αυτή με τη σειρά της εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της ροής αμέσως πριν την έξοδο και κυρίως τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ακροφυσίου που συμπεριλαμβάνουν, την σύγκλιση της ροής στο εσωτερικό τμήμα του θαλάμου καθησυχασμού πριν την έξοδο (βλ. Σχήμα 1). Για να πάρουμε μια καλύτερη εικόνα των μηχανισμών που εμπλέκονται στην ανάπτυξη της συγκεκριμένη δομής, εξετάζουμε την εξίσωση της στροβιλότητας, στην αρχική ζώνη ανάπτυξης της δέσμης. Το ισοζύγιο στροβιλότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{D\Omega_X}{Dt} = \underbrace{\Omega_X \frac{\partial U}{\partial x}}_{A} + \underbrace{\Omega_Y \frac{\partial U}{\partial y}}_{B} + \underbrace{\Omega_Z \frac{\partial U}{\partial z}}_{C} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(\overline{w^2} - \overline{v^2}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\overline{vw}) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\overline{vw})}_{D} + \underbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 \Omega_X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_X}{\partial z^2} \right)}_{E}$$

Στην παραπάνω εξίσωση, οι τρεις πρώτοι όροι στο αριστερό μέλος χαρακτηρίζουν την συνολική συνεισφορά της μέσης στροβιλότητας, οι επόμενοι τρεις την συνεισφορά των τυρβωδών διακυμάνσεων και των τάσεων Reynolds, ενώ ο τελευταίος όρος την επίδραση του ιξώδους. Οι πιο σημαντικοί όροι στην παραπάνω εξίσωση είναι οι όροι B και C. Οι υπόλοιποι υπολογίστηκαν σε αξονικές θέσεις από την έξοδο μέχρι και x/h=13, δίνοντας σχετικά πολύ μικρότερες τιμές, εκτός από τον τελευταίο όρο που συνήθως υπολογίζεται έτσι ώστε να ισχύει η παραπάνω ισότητα.

Οι όροι B και C της παραπάνω εξίσωσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 8α και β. Είναι φανερό ότι η παραμόρφωση στο περίγραμμα της μέσης ταχύτητας συναρτάται με τις κατανομές των παραπάνω όρων. Για παράδειγμα, παρατηρώντας την πάνω δεξιά γωνία στην τομή της δέσμης, ο όρος B είναι θετικός και ο όρος C αρνητικός. Οι τιμές αυτές δείχνουν ότι οι όροι αυτοί είναι συμβατοί με τη μεταφορά ρευστού από το κέντρο της δέσμης προς την περιφέρεια, και τη διαμόρφωση της μορφής αλτήρα του περιγράμματος. Σε σχέση με το ρόλο που μπορεί να παίζουν οι συγκεκριμένοι όροι στη διαμόρφωση κατανομών τύπου σάγματος, η απάντηση δεν είναι ξεκάθαρη, αν και η διασταύρωση των ζωνών θετικής και αρνητικής συνεισφοράς στροβιλότητας από αυτούς τους όρους βρίσκεται επίσης στη θέση των μέγιστων τιμών της ταχύτητας. Σημαντικό θέμα που χρήζει διερεύνησης είναι αν οι κατανομές αυτές είναι υπεύθυνες ή αν είναι το αποτέλεσμα της εμφάνισης των κατανομών σάγματος και του περιγράμματος μορφής αλτήρα.

4. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, C.G., Fellouah, H., A.Pollard, 2012. The flow field in turbulent round free jets, Prog. Aero. Sci., 50, p.1.

Bradbury, L. J. S., 1965. The structure of a self-preserving turbulent jet. J. Fluid. Mech. 23, p.31.

Davis, J.C. 2002. Statistics and Data Analysis in Geology, Third Edition, John Wiley & Sons.

Deo, R. C., Mi, J., Nathan G. J., 2007a. The influence of nozzle-exit geometric profile on statistical properties of a turbulent plane jet. Exp.Therm. Fluid Sci. 32, p.545.

Deo, R. C., Mi, J., Nathan G. J., 2007b. The influence of nozzle aspect ratio on plane jets. Exp.Therm. Fluid Sci. 31, p.825.

Dimotakis, P. 2000. The mixing transition in turbulent flows, J. Fluid Mech. 409, p.69

duPlessis, M. P., Wang, R. L., Kahawita, R., 1974. Investigation of the near-region of a square jet. J. Fluids Eng. 96, p.246.

Grinstein, F., 1995 Self-induced vortex ring dynamics in subsonic rectangular jets, Phys. Fluids, 7(10), p.2519

Grinstein, F., 2001. Vortex dynamics and entrainment in rectangular free jets, J. Fluid Mech. 437, p.69.

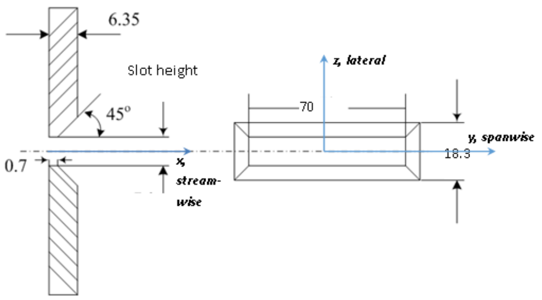
Krothapalli, A., Baganoff, D., Karamcheti, K., 1981. On the mixing of a rectangular jet. J. Fluid Mech. 107, p.201.

McIlwain, S., Pollard, A., 2002. Large eddy simulation of the effects of mild swirl on the near field of a round free jet, Phys. Fluids 14(2) p.653.
Pollard, A., Iwaniw, M. A., 1985. Flow from sharp-edged rectangular orifices. AIAA J. 23, p.631
Quinn, W. R. 1992, Turbulent free jet flows issuing from sharp-edged rectangular slots: the influence of slot aspect ratio, Expt. Thermal Fluid Science, 5, p.203.
Quinn, W. R., Militzer, J., 1988. Experimental and numerical study of a turbulent free square jet. Phys. Fluids 31, p.1017.
Quinn, W. R., Pollard, A., Masters, G. F., 1985. Mean velocity and static pressure distributions in a three-dimensional turbulent jet. AIAA J. 23, p.971.
Schwab, R.R., 1986. An experimental and numerical investigation of three-dimensional jet flows from sharp-edged orifices, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Queen's University.
Sfeir, A., A., 1976. The velocity and temperature fields of rectangular jets. Int. J. Heat Mass Transf. 19, p.1289.
Sforza, P. M., Herbst, G., 1970. A study of three-dimensional, incompressible turbulent wall jets. AIAA J. 8, p.276.
Tipnis, T.J., Knowles, K., Bray, D. 2013. Statistical modelling for prediction of axis-switching in rectangular jets, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 227(8) p.1325.
Tsuchiya, Y., Horikoshi, C., Sato T., 1986. On the spread of rectangular jets. Exp. Fluids 4, 1p.97.
Zaman, K. B. M. Q., 1996. Axis switching and spreading of an asymmetric jet: the role of coherent structure dynamics, J. Fluid Mech. 316, p.1

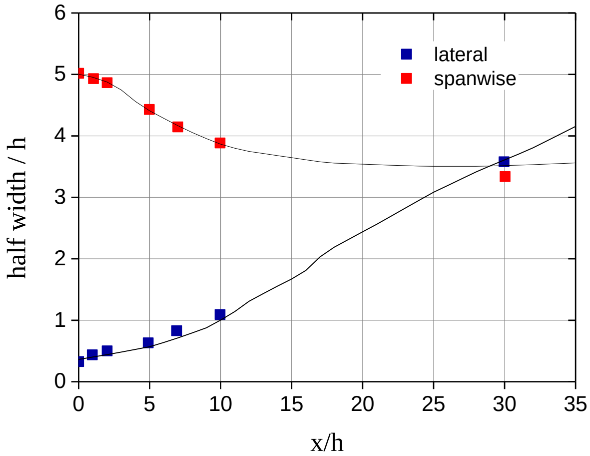
NEAR FIELD CHARACTERISTICS OF RECTANGULAR JETS

Experimental results on the near field development of a free rectangular jet with aspect ratio 10 are presented. The jet issues from a sharp-edged orifice attached to a rectangular settling chamber at Re_h=23,000, based on slot width, h. Measurements on cross plane grids were obtained with a two-component hot wire anemometry probe, which provided information on the three dimensional characteristics of the flow field. Two key features of this type of jet are mean axial velocity profiles presenting two off axis peaks, commonly mentioned as saddleback profiles, and a predominant dumbbell shape as described by, for example, a contour of the axial mean velocity. The saddleback shape is found to be significantly influenced by the vorticity distribution in the transverse plane of the jet, while the dumbbell is traced to two terms in the axial mean vorticity transport equation that diffuse fluid from the centre of the jet towards its periphery. At the farthest location where measurements were taken, 30 slot widths from the jet exit, the flow field resembles that of an axisymmetric jet.

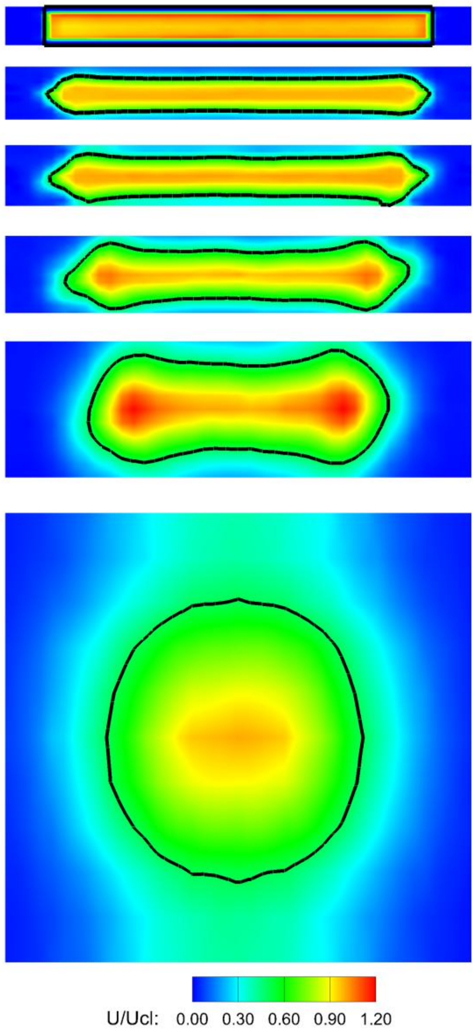
ΣΧΗΜΑΤΑ



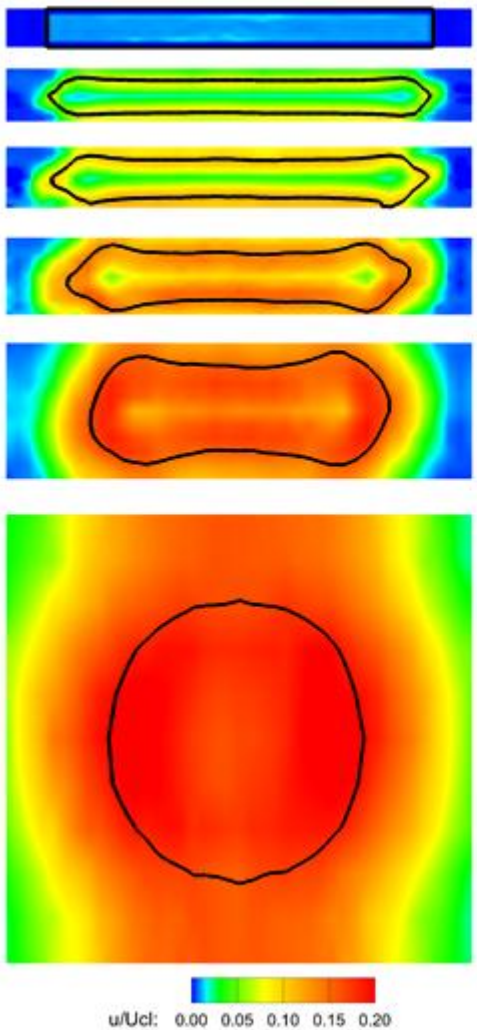
Σχήμα 1. Η γεωμετρία του ακροφυσίου στην έξοδο



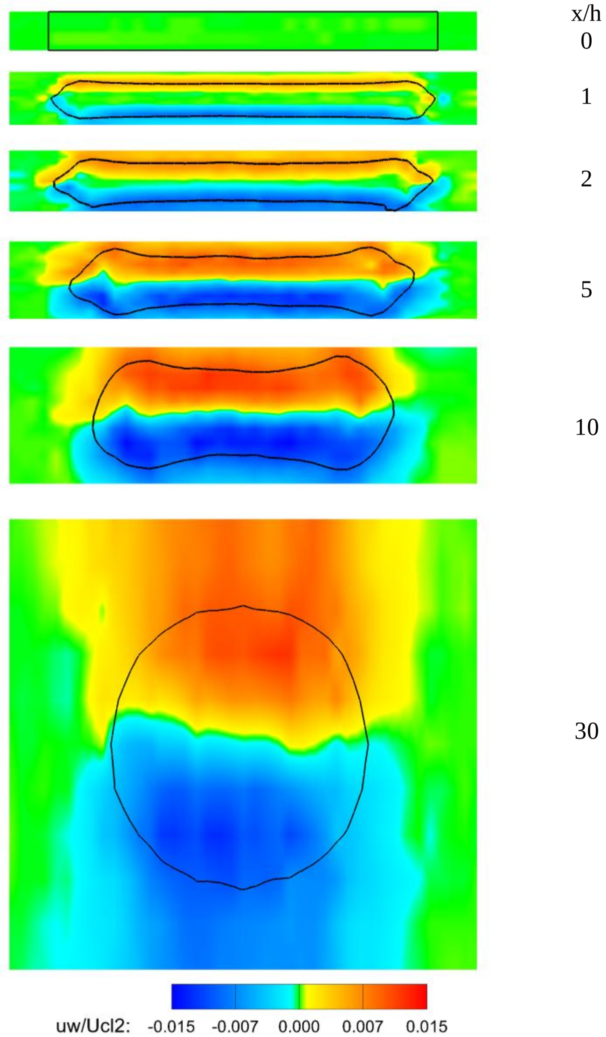
Σχήμα 2. Ημιπλάτος της αξονικής ταχύτητας στις κάθετες διευθύνσεις *(Η μαύρη συνεχόμενη γραμμή αναπαριστά τα δεδομένα του Quinn, 1992)*



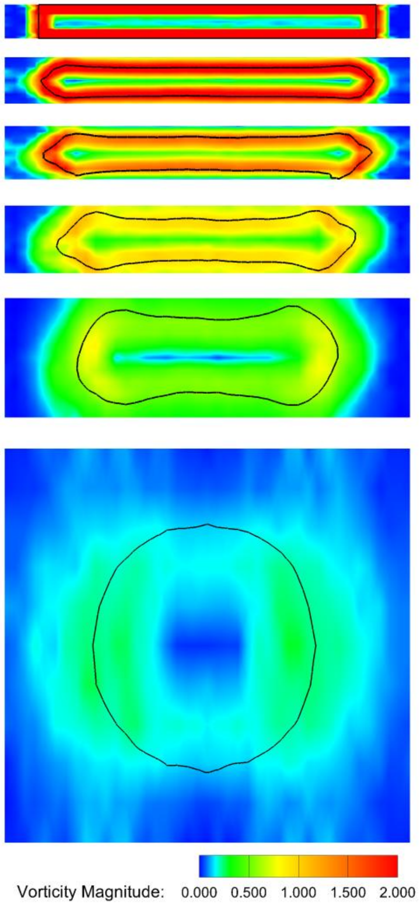
Σχήμα 3: Ισοϋψείς της μέσης διαμήκους ταχύτητας. *(Οι μαύρες καμπύλες σε αυτό και τα επόμενα σχήματα σηματοδοτούν την ισοϋψή U/U_{cl}=0.5)*



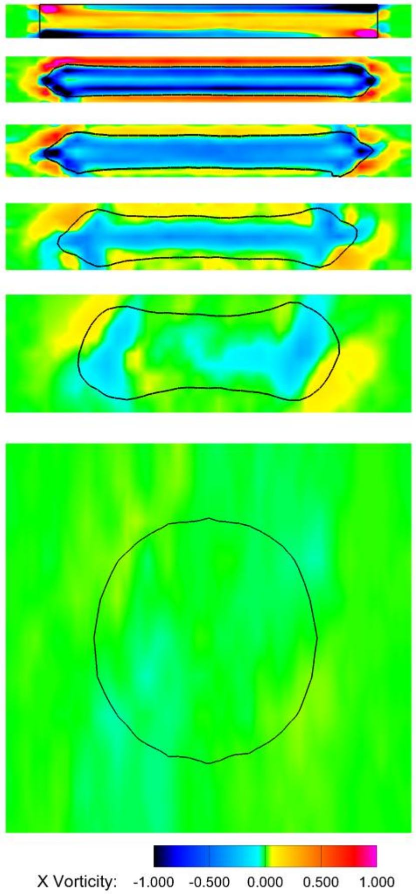
Σχήμα 4: Ισοϋψείς της αξονικής διακύμανσης (rms) της ταχύτητας



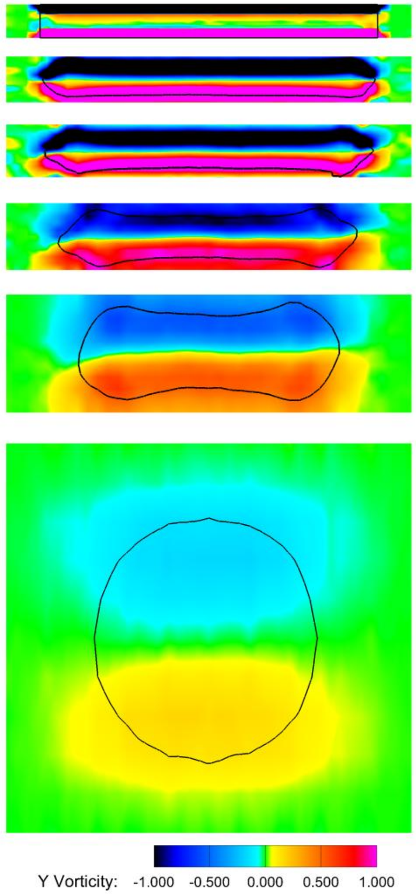
Σχήμα 5: Ισοϋψείς της διατμητικής τάσης Reynolds uw.



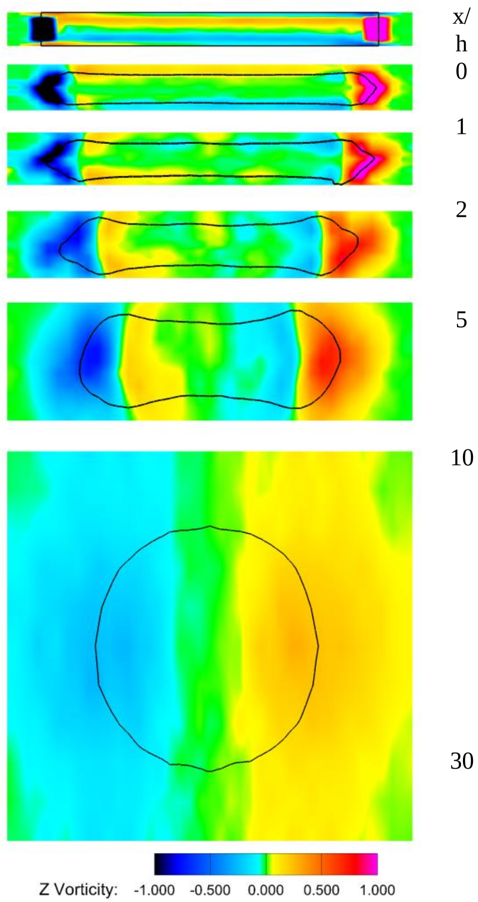
Σχήμα 6: Ισοϋψείς του μέτρου της μέσης ολικής στροβιλότητας



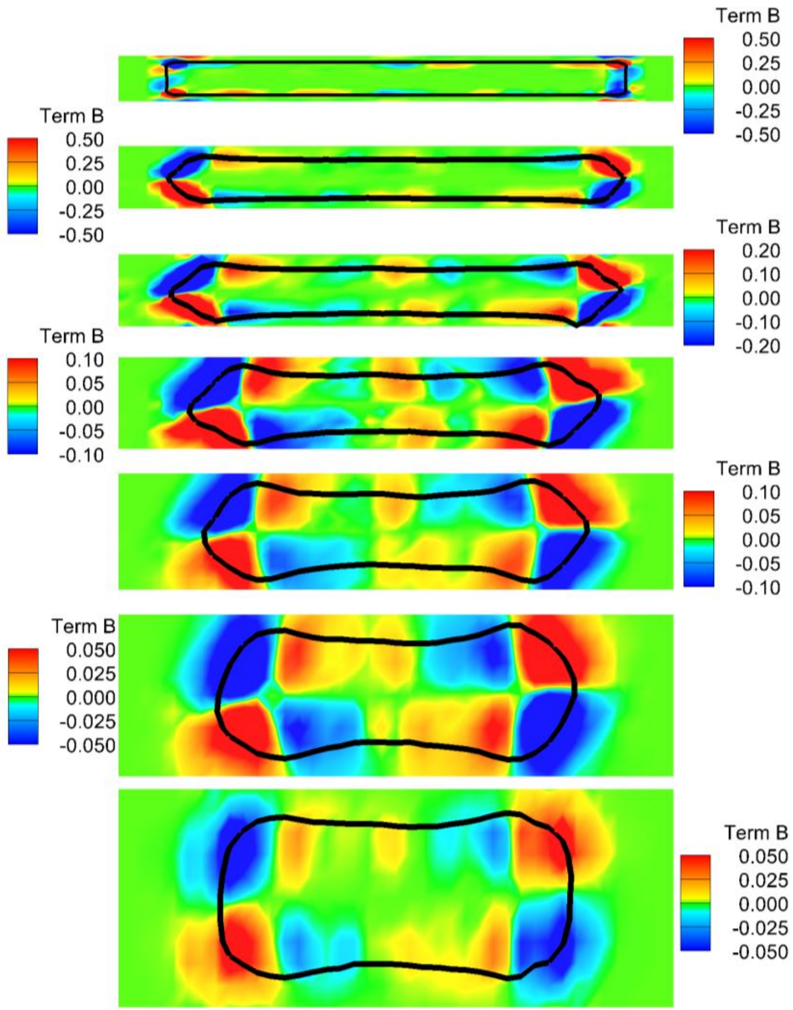
Σχήμα 7α: Ισοϋψείς της μέσης αξονικής στροβιλότητας



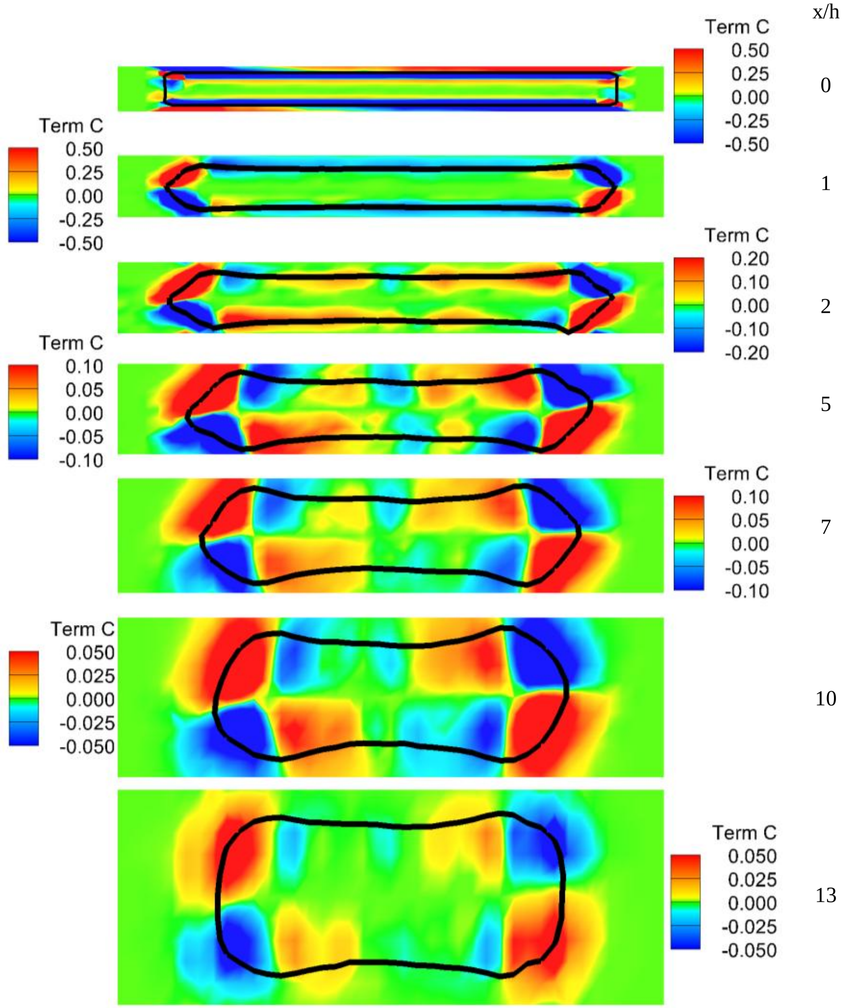
Σχήμα 7β: Ισοϋψείς της μέσης κάθετης στροβιλότητας (Ω_Y)



Σχήμα 7γ: Ισοϋψείς της μέσης κάθετης στροβιλότητας (Ω_Z)



Σχήμα 8α: Ισοϋψείς του όρου B της εξίσωσης στροβιλότητας



Σχήμα 8α: Ισοϋψείς του όρου C της εξίσωσης στροβιλότητας